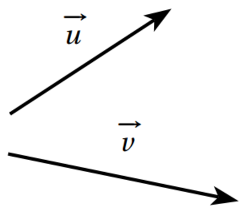
Chap.1 : Géométrie élémentaire du plan

1 Repérage dans le plan

1.1 Vecteurs colinéaires, famille libre, famille liée

Définition 1.1. *On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont* ***colinéaires*** *lorsqu'il existe un nombre réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*



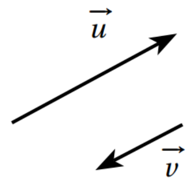


FIGURE 2 – Vecteurs colinéaires

FIGURE 1 – Vecteurs non colinéaires

Définition 1.2. *On dit que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une* ***famille libre*** *(ou que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont linéairement indépendants) lorsque :*

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Une famille non libre est appelée une ***famille liée****.*
$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est donc liée lorsque :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 - \ \{(0,0)\} / \lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{o}$$

Exemple 1.3. *Dans l'exemple de la Figure 2, nous avions $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Donc la famille n'est pas libre, elle est liée.*

Proposition 1.4. *$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est liée si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

Preuve :

1.2 Bases et repères du plan

Il existe deux manières d'orienter le plan , c'est à dire deux manières d'attribuer le signe positif à un sens de rotation. Dans ce qui suivra, le plan sera orienté dans le **sens trigonométrique** (c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre).

Définition 1.5. *On appelle* ***base du plan*** *toute famille libre de deux vecteurs, c'est à dire tout couple* $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ *où* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *sont non colinéaires.*
On appelle ***base orthonormale*** *(ou* ***orthonormée****) du plan„ toute base* $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ *telle que l'angle non orienté* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *mesure* $\frac{\pi}{2}$ *et que* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *soient de norme 1.*
On appelle ***base directe*** *du plan toute base* $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ *telle que l'angle orienté* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *ait sa mesure principale positive.*

Théorème 1.6. *Soit* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ *une base de vecteurs du plan. Tout vecteur* $\overrightarrow{w}$ *du plan se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de* $\overrightarrow{u}$ *et de* $\overrightarrow{v}$*. C'est à dire qu'il existe un unique couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*

$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$$

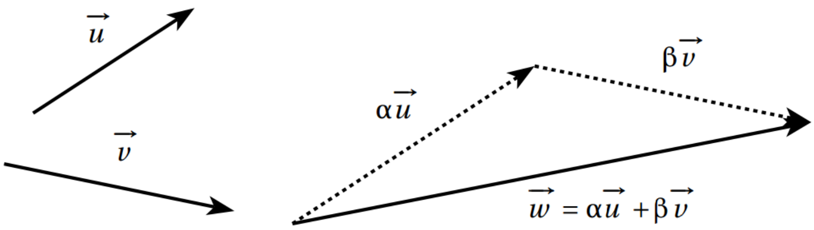


FIGURE 3

On dit alors que (α, β) est le couple de **coordonnées cartésiennes** du vecteur $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque 1.7. *De même, si* 0 *est un point du plan, alors pour tout point* M *du plan, il existe un unique couple* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$$

On dit alors que (x, y) *est le couple de coordonnées cartésiennes du point* M *dans le repère* $\mathscr{R} = (0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Application 1.8. *Soit* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ *une base de vecteurs du plan et :*

$$\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \text{ et } \overrightarrow{w_3}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{w_1} - 3\overrightarrow{w_2} + 22\overrightarrow{w_3}$.
2. $\overrightarrow{w_1}$ *peut-il s'écrire comme combinaison linéaire de* $\overrightarrow{w_2}$ *et* $\overrightarrow{w_3}$ *? Si oui, déterminer deux réels* α *et* β *tels que* $\overrightarrow{w_1} = \alpha\overrightarrow{w_2} + \beta\overrightarrow{w_3}$

Application 1.9. *Soit* $ABCD$ *un parallélogramme non aplati de centre* Ω. *Donner les coordonnées de* Ω *dans chacun des repères cartésiens suivants :*

1. $\mathscr{R}_1 = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2. $\mathscr{R}_2 = (B; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
3. $\mathscr{R}_3 = (C; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
4. $\mathscr{R}_4 = (A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

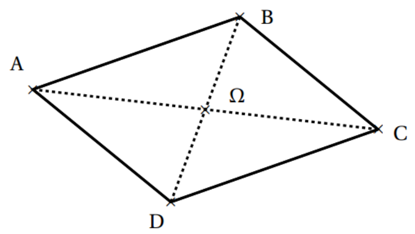


FIGURE 4

Proposition 1.10. *Soit* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ *une base de vecteurs du plan. Étant donnés deux vecteurs* $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et un réel* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors :*

1. $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$
2. $\lambda\overrightarrow{w_1}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

De plus, si A *et* B *sont deux points de coordonnées respectives* (x_A, y_A) *et* (x_B, y_B) *alors* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Preuve :

1.3 Coordonnées polaires

Dans ce qui suit, le plan est muni d'un repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormal direct. C'est dans ce repère que l'on notera les différentes coordonnées.

Définition 1.11. *Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, on note :*

1. $\rho = \|\overrightarrow{u}\|$ *qui est appelé le* ***rayon polaire***
2. $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})(2\pi)$ *qui est une mesure de l'****angle polaire*** *de* $\overrightarrow{u}$

On définit les mêmes valeurs pour un point M du plan avec :

1. $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$
2. $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})(2\pi)$

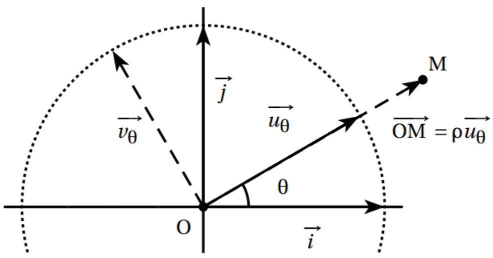


Figure 5

Proposition 1.12. *On note $\overrightarrow{u}_\theta(cos(\theta), sin(\theta))$ et $\overrightarrow{v}_\theta(-sin(\theta), cos(\theta))$. Alors $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$ est une base orthonormé directe appelée* ***base polaire*** *associée à θ.*
On a alors : $\overrightarrow{u} = \rho\overrightarrow{u}_\theta = \rho(cos(\theta)\overrightarrow{i} + sin(\theta)\overrightarrow{j})$

Pour tout point M du plan, le couple (ρ, θ) ainsi obtenu est appelé coordonnées polaires de M dans le repère $\mathscr{R}$, on notera $M[\rho, \theta]$. On dit que ρ est la ***coordonnées radiale*** *et que θ est l'****azimut*** *du point M.*

Remarque 1.13. *Pour $M\,[\rho,\theta]$, on remarque que $[-\rho,\theta\pm\pi]$ et $[\rho,\theta+2k\pi]$ avec $k\in\mathbb{Z}$ sont également des coordonnées polaires du point M. Par convention, on donnera les coordonnées polaires en s'imposant $\rho\geq 0$ et $\theta\in\,]-\pi;\pi]$.*

Application 1.14. *Placer dans $\mathscr{R}$ les points M,N,P et Q dont les coordonnées polaires sont $[3,\frac{\pi}{4}]$, $[2,\frac{-\pi}{6}]$, $\left[3,\frac{3\pi}{4}\right]$ et $\left[2,\frac{5\pi}{6}\right]$.*

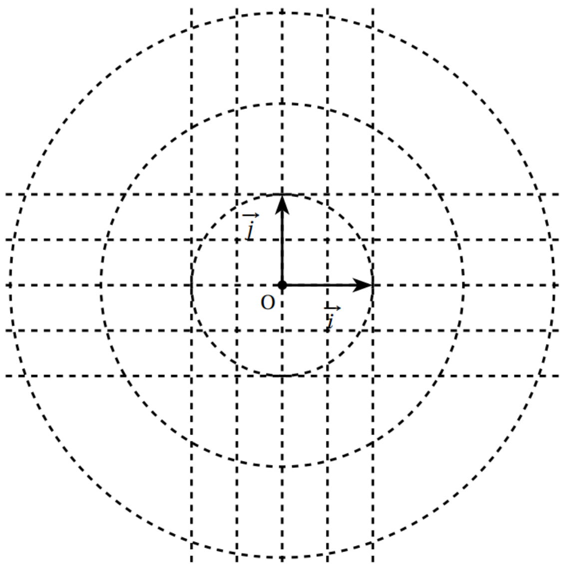


FIGURE 6

1.4 Lien entre les deux modes de repérage

Proposition 1.15. *Le plan étant muni d'un repère $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ orthonormal, soit M un point du plan distinct de 0 dont on note $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $(\rho;\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ les coordonnées cartésiennes et polaires dans $\mathscr{R}$. Alors :*

$$\begin{cases} x=\rho cos(\theta) \\ \\ y=\rho sin(\theta)\end{cases} \iff \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \\ cos(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ sin(\theta)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

Application 1.16. *1. Donner les coordonnées polaires des points de coordonnées cartésiennes :*
a) $A(4;4)$ *b)* $B(1;\sqrt{3})$ *c)* $C(-2;-2)$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées polaires suivantes :
a) $D\,[3;\frac{-\pi}{2}]$ *b)* $E\left[4;\frac{2\pi}{3}\right]$ *c)* $F\left[2;-\frac{3\pi}{4}\right]$

2 Produit scalaire de deux vecteurs

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle* ***produit scalaire*** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par :*

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ *si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *ou* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *sinon*

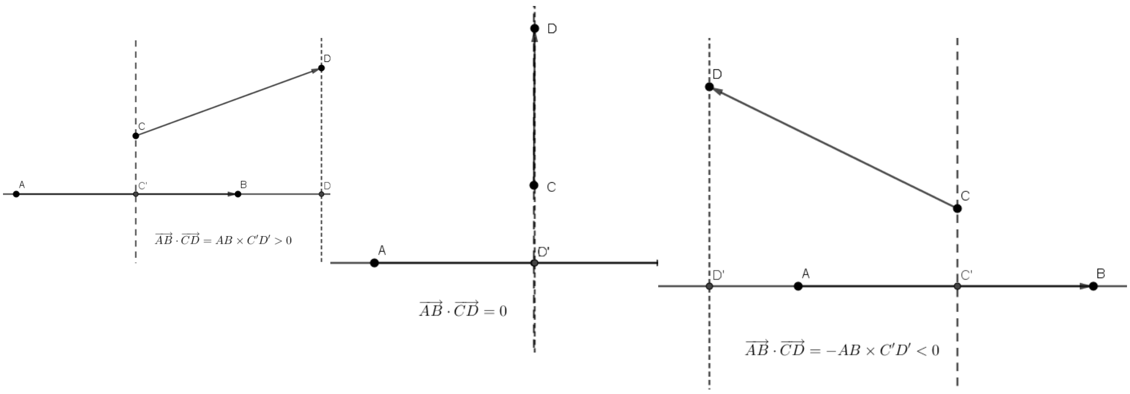
Lorsque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***orthogonaux****.*

Proposition 2.2.
- ***Symétrie du produit scalaire :*** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

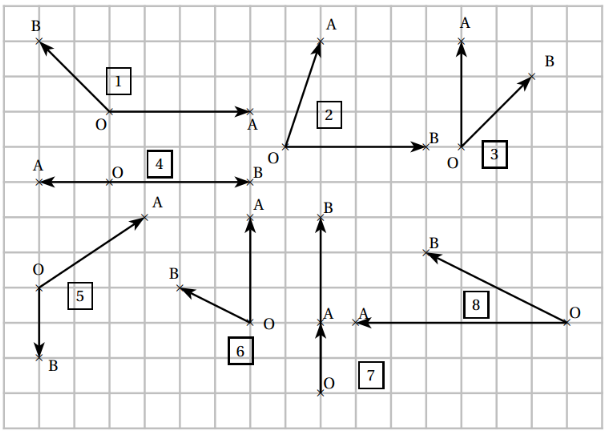
Application 2.3. *1. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ dans le cas où $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{5\pi}{6}$.*
2. Donner une valeur approchée de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -3$

Proposition 2.4. ***Interprétation en termes de projection orthogonale.***
Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$. On note C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$$



Application 2.5. *L'unité de longueur étant le carreau, calculer* $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ *dans les cas suivants :*



Proposition 2.6. ***Bilinéarité du produit scalaire.***
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *trois vecteurs du plan et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

1. *Linéarité à droite :*

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \text{ et } \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

2. *Linéarité à gauche :*

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \text{ et } (\lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

Proposition 2.7. *1.* ***Identités remarquables :***

- $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
- $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

2. Autre expression du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$$

Preuve :

Application 2.8. *$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\|u\| = 3$, $\|u\| = 4$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -5$. Calculer :*
1. $\overrightarrow{u}\cdot(2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})$
2. $(\overrightarrow{u}-4\overrightarrow{v})\cdot(3\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v})$

2.2 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 2.9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées cartésiennes $(x;y)$ et $(x';y')$ dans une base orthonormée, alors :*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Application 2.10. *$\mathscr{B}$ est une base orthonormée de vecteurs du plan. Dans chaque cas, déterminer les réels m pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux :*
1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2-m\\5\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1+m\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$;
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}m-4\\2m+1\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2m\\3-m\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

2.3 Applications du produit scalaire

Proposition 2.11. ***Perpendicularité de deux droites*** *: soient deux droites* (d) *et* (d') *de vecteurs directeurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*, alors* (d) *et* (d') *sont perpendiculaires si et seulement si* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Proposition 2.12. ***Mesure d'un angle non orienté*** *: soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls. La mesure de l'angle non orienté* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *vaut :*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = Arccos(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|})$$

Application 2.13. *on munit le plan d'un repère orthonormal* $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. Soient* $A(3;1)$ *et* $B(1;2)$*. Déterminer la mesure de l'angle non orienté* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$*.*

3 Déterminant dans une base orthonormée directe

3.1 Définition et propriétés

Définition 3.1. *On appelle* **déterminant** *dans une base orthonormée directe de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *le réel défini par :*

1. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$ *si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *sinon*

Proposition 3.2. *Interprétation comme aire orientée d'un parallélogramme :* $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ *est l'aire orientée (c'est-à-dire du signe de la mesure principale de* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *si cet angle existe) du parallélogramme construit sur* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*.*

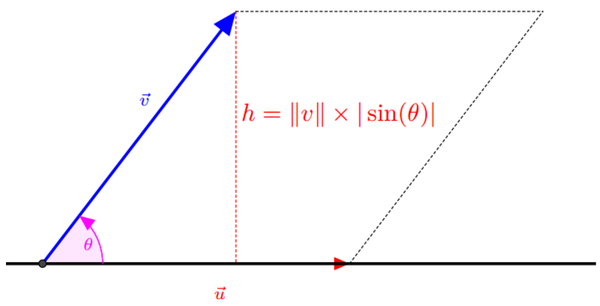


FIGURE 7 – Sur cette figure, le déterminant est positif

Application 3.3. *1. Calculer* $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ *lorsque* $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ *et* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{7\pi}{6}$
2. Donner une valeur approchée de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *lorsque* $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ *et* $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -6$

Proposition 3.4. *Le déterminant est antisymétrique :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$$

3.2 Caractérisation de la colinéarité par le déterminant

Théorème 3.5. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan. Alors :*

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$$

Remarque 3.6. *Une produit scalaire nul nous indique si les vecteurs sont orthogonaux, un déterminant nul nous indique que les vecteurs sont colinéaires.*

Proposition 3.7. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan et* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$*. Alors :*

1. $\mathscr{B}$ *est une base du plan si et seulement si* $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \neq 0$
2. $\mathscr{B}$ *est une base directe du plan si et seulement si* $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] > 0$

Proposition 3.8. *Trois points* A, B *et* C *du plan sont alignés si et seulement si* $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$.

3.3 Expression du déterminant dans une base orthonormée directe

Proposition 3.9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(x;y)$ et $(x';y')$ dans une base orthonormée directe. Alors :*

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = xy' - yx'$$

Ce nombre est également noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Application 3.10. *$\mathscr{B}$ est une base orthonormée de vecteurs du plan. Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3+m \\ m+1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ m-1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ constituent-ils une base du plan ? une base orthogonale du plan ?*

Application 3.11. *Pour quelles valeurs du réels x les points*

$$P(2x+1, x-2),\ Q(3x, x-1) \text{ et } R(2(x+1), 2x-3)$$

dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé direct, sont-ils alignés ?

Proposition 3.12. ***Bilinéarité du déterminant.***
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}$ trois vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. *Linéarité à droite :*

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}] \text{ et } [\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v}] = \lambda\,[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$$

2. *Linéarité à gauche :*

$$[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \text{ et } [\lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \lambda [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$$

Application 3.13. *$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}$ trois vecteurs du plan tels que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 2$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -3$. Calculer les déterminants suivants :*

$$[2\overrightarrow{w} + 7\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] \text{ et } [\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}, 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}]$$

3.4 Mesure d'un angle orienté

Proposition 3.14. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls :*

1. *si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \geq 0$ alors toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ vaut :*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = arccos(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|})$$

2. *si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] < 0$ alors toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ vaut :*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -arccos(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|})$$

Application 3.15. *On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminer la valeur de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}(-1, 3)$ et $\overrightarrow{v}(4, -2)$.*