Concours Blanc - Mathématiques
Lycées A.Artaud-G.Tillion-J.Ferry

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Chaque exercice sera traité sur une copie différente.

Exercice 1.

On note $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Réduction

1. *Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.*
2. *Justifier que A possède une unique valeur propre et donner son ordre de multiplicité.*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?*

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

4. *Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.*
5. *Calculer le rang de la matrice A. L'endomorphisme f est-il surjectif ?*
6. *L'endomorphisme f est-il injectif ? Est-il bijectif ?*
7. *On pose $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$. Montrer que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.*
8. (a) *Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Calculer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.*

Partie B Étude d'une suite de matrices

1. *Montrer que* $A^2 = 2A - I$.
2. *Montrer que la matrice* A *est inversible et que* $A^{-1} = 2I - A$.
3. *Soient* $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ *des nombres réels vérifiant* $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. *Montrer que* $\alpha = \alpha'$ *et* $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *par la condition initiale* $X_0 = A$ *et la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A$$

4. *Montrer que pour tout entier naturel* n, *il existe un unique couple* (α_n, β_n) *de réels tel que*

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} \alpha_{n+1} & = & \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} & = & \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

5. *Déterminer* $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3,$ *et* β_3,
6. *Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de* α_n *et* β_n *pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, *puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de* X_n, *en fonction de* n.

Exercice 2.

On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ *désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3.*

Étude d'un produit scalaire

Pour tous P *et* Q *dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *on pose :*

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

On admettra que que, pour tout $n \in \mathbf{N}, I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t$ *converge et vaut* $n!$.

1. *Justifier rapidement que, pour tous* P *et* Q *dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$ *converge.*
2. *Montrer que l'application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_3[X]$.

Construction d'une base orthogonale

Soit Φ *l'application définie sur* $\mathbb{R}_3[X]$ *par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X).$$

On admettra que Φ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$*. On rappelle que la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *est la famille* $\mathscr{B}_c = \{1, X, X^2, X^3\}$*.*

3. *Vérifier que la matrice de* Φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *est :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. *Montrer alors que les valeurs propres de* Φ *sont* $0, -1, -2$ *et* -3*. L'endomorphisme* Φ *est-il diagonalisable ?*
5. *Pour tout* $k \in \{0, 1, 2\}$*, déterminer un vecteur propre* P_k *de* Φ *associé à la valeur propre* $-k$ *et dont le coefficient dominant vaut 1 . On présentera et on expliquera les calculs effectués.*

On supposera dans la suite que P_3 *désigne un vecteur propre de* Φ *associé à la valeur propre* -3 *et de coefficient dominant égal à 1 .*

6. *Soient* P *et* Q *dans* $\mathbb{R}_3[X]$*.*
   (a) *On pose* $f : t \longmapsto tP'(t)e^{-t}$*.*
   Justifier que f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0, +\infty[$*.*
   Pour tout $t \geq 0$*, exprimer* $f'(t)$ *en fonction de* $\Phi(P)(t)$ *et de* e^{-t}*.*
   (b) *Montrer que*
   $$\langle \Phi(P), Q \rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$
   (c) *En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale* $\int_0^A f'(t)Q(t)\mathrm{d}t$ *avec* $A \in \mathbb{R}$*, montrer que :*
   $$\langle \Phi(P), Q \rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$
   (d) *En déduire que* $\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle$*.*
7. *On rappelle que, pour tout* $i \in \{0, 1, 2, 3\}, P_i$ *est un vecteur propre de* Φ *associé à la valeur propre* $-i$*.*

Soient i *et* j *dans* $\{0, 1, 2, 3\}$ *tels que* $i \neq j$*.*
En remarquant que $\langle \Phi(P_i), P_j \rangle = \langle P_i, \Phi(P_j) \rangle$*, montrer que :*

$$(i-j)\langle P_i, P_j\rangle = 0$$

puis que P_i et P_j sont orthogonaux.

8. *En déduire que la famille $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux.*

Exercice 3. *On rappelle que la fonction tangente, notée tan, réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée arctan, est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est de plus impaire, dérivable et :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante. La première question de la partie C nécessite le résultat de la question 2 de la partie B. Les questions 2 à 7 de la partie C peuvent être traitées de manière indépendante des parties A et B.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \qquad \text{(E)}$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \qquad \text{(H)}$$

1. *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur $\mathbb{R}^{+*}$.*
2. *Déterminer une solution λ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la fonction*

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$$

soit solution particulière de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

1. (a) *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 2.

   (b) *En déduire le développement limité de arctan au voisinage de* 0 *à l'ordre* 3, *puis celui de la fonction* f *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 2.

2. *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en* 0. *Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.*

Dans la suite on continuera à noter f *la fonction ainsi prolongée de sorte que* f *est désormais définie sur* $\mathbb{R}$.

3. *Montrer que la fonction* f *est dérivable en* 0. *Préciser* $f'(0)$ *et la position du graphe de la fonction* f *par rapport à sa tangente au voisinage de* 0.

4. *Étudier les variations de la fonction* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Donner le signe de* $p(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

5. *Démontrer que pour tout réel* x *de* $\mathbb{R}^*$, *on a* $f'(x) = \dfrac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$ *puis prouver que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

6. *Dresser le tableau de variation de la fonction* f. *On y fera apparaître ses limites en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

Partie C - Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie on étudie l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}dt$ *dont on cherche à donner une approximation. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,1]$, *on définit*

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}dt \qquad \text{et} \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1. *Pourquoi l'intégrale* I *est-elle bien définie ? Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2 de la partie B.*

2. *Établir pour tout réel* $x \in [0,1]$ *la majoration*

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. *Justifier que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout réel* t *de* $[0,1]$, *on a*

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}.$$

En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$x s_n'(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$

4. *Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que*

$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n(1)$.

5. *Écrire une fonction nommée **s**, en Python, qui prend en entrée un entier naturel non nul n et renvoie le nombre $s_n(1)$.*
6. *Écrire une fonction nommée **trouve_N**, en Python, qui prend en entrée un réel strictement positif ε et renvoie le plus petit entier N tel que $\dfrac{1}{(2N+1)^2} \leq \varepsilon$.*
7. *En utilisant les fonctions **s** et **trouve_N**, écrire en Python la ou les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale I à 10^{-10} près.*