Interrogation 1 - CORRECTION

Exercice 0.1. *$\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe de vecteurs du plan. Pour quelles valeurs de a les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a+2\\a+3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\a+3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ constituent-ils :*

1. *une base du plan ?*
2. *une base orthogonale du plan ?*

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a+2\\a+3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\a+3\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ constituent une base du plan
$\Leftrightarrow$ la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est libre
$\Leftrightarrow [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \neq 0$
$\Leftrightarrow (a+2)(a+3) - 2(a+3) \neq 0$
$\Leftrightarrow a^2 + 3a = a(a+3) \neq 0$
$\Leftrightarrow a \neq 0$ et $a \neq -3$

Ainsi, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base du plan si et seulement si $a \in \mathbb{R} - \{-3; 0\}$.

La base sera orthogonale si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
$\Leftrightarrow 2(a+2) + (a+3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + 8a + 13 = 0$

$\triangle = 8^2 - 4 \times 1 \times 13 = 12 = 4 \times 3 > 0$ Il existe donc deux solutions réelles :

$$a_1 = \frac{-8-2\sqrt{3}}{2} = -4 - \sqrt{3} \text{ et } a_2 = -4 + \sqrt{3}$$

$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est donc une base orthogonale lorsque $a = -4 - \sqrt{3}$ ou $a = -4 + \sqrt{3}$

Exercice 0.2. *Pour quelles valeurs du réels x les points*

$$A(2x, x),\ B(3x-1, x+1) \text{ et } C(2x+1, 2x-1)$$

dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé direct, sont-ils alignés ?

On sait que :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3x-1-2x\\x+1-x\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x-1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2x+1-2x\\2x-1-x\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\x-1\end{pmatrix}$$

A, B et C sont alignés
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1-1)(x-1+1) = (x-2)x = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 0$

Exercice 0.3. *Soient les points $A(-2;4)$ et $B(3;2)$ dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé direct.*

1. *Donner une équation cartésienne de la droite (AB).*
   On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).
   Si $(AB) : ax + by + c = 0$ alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.
   On peut donc poser : $\begin{cases} -b = 5 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ a = -2 \end{cases}$.
   Donc $(AB) : -2x - 5y + c = 0$. Reste à déterminer c.
   On sait que $A(-2;4) \in (AB)$ donc :
   $$-2 \times (-2) - 5 \times 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = 16$$
   D'où $(AB) : -2x - 5y + 16 = 0$.
2. *Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AB).*
   On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et que $A(-2;4) \in (AB)$ donc :
   $$(AB) : \begin{cases} x = 5t - 2 \\ y = -2t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$