Pour le 4 septembre 2023
Devoir-Maison 1

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est dit **nilpotent** si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ où le plus petit entier k tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ est appelé **indice de nilpotence.** :

$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

PARTIE A. Deux exemples.

1. Soit l'application linéaire : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $\bar{z} - iz$.
   On se place dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$ et on prend pour base $\mathscr{B} = \{1, i\}$. Par exemple, la matrice du vecteur $2-3i$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner la matrice A de f et montrer que f est nilpotent d'indice 2 .
   (b) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(1-i)$ et que $\text{Im}(f) = \ker(f)$.
   (c) Montrer que $\mathscr{B}' = \{1-i, 1\}$ est une base de $\mathbb{C}$.
   (d) Donner alors la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$ et rappeler le lien entre les deux matrices A et M.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à P associe $XP'' + P' + P$
   (a) Montrer que Φ est linéaire.
   (b) Donner sa matrice M dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Vérifier alors que $\Phi - Id$ est nilpotent.
   (d) Montrer que Φ est un isomorphisme et expliciter $\Phi^{-1}\left(a + bX + cX^2\right)$
   (e) Chercher alors une solution polynomiale de l'équation différentielle :
   $$xy'' + y' + y = x^2.$$

PARTIE B

Dans un espace de dimension n avec un endomorphisme nilpotent d'indice 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n strictement supérieure à 1 .
On considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2 , donc non-nul et vérifiant :

$$f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On note r le rang de f et k la dimension du noyau de f.

1. (a) f est-il bijectif ? On pourra raisonner par l'absurde.
   (b) Démontrer que Imf $\subseteq \ker f$.
   (c) En utilisant le théorème du rang, en déduire que :
   $$r \leq \frac{n}{2} \text{ et } k \geq \frac{n}{2} \cdot (*)$$
   (d) Pourquoi r ne peut-il pas être nul ? On pourra raisonner par l'absurde.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
   (a) Justifier que $Imf = \ker f$ en utilisant notamment $(*)$.
   (b) Soit u un vecteur non-nul appartenant à Imf et v un vecteur tel que $f(v) = u$.
   Démontrer que la famille $(u; v)$ est une base de E.
   (c) Donner alors la matrice de f dans la base $(u; v)$.

Remarque : on retrouve les résultats de la question (1) partie A .