Programme de khôlle 2

Semaine du 18 septembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?
   (a) $\{f_1 : x \mapsto 1, f_2 : x \mapsto e^x, f_3 : x \mapsto xe^{2x}\}$
   (b) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \cos 2x, f_3 : x \mapsto \cos 3x, f_4 : x \mapsto \cos 4x\}$
   (c) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{3}), f_3 : x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})\}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :*

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\} \\ G &= \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) \ \text{ où } u_1 = (1; -1; 2; 2) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_2 = (2; 1; 4; -2) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_3 = (1; 2; 2; -4) \end{aligned}$$

Donner une base des sous-espaces vectoriels $F, G, F \cap G$, et $F + G$.

Exercice 2.2. *Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.*

1. *Montrer que F et G sont deux sous sous-espaces vectoriels de E*

2. *Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E.*

Exercice 2.3. *Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on considère les polynômes :*

$$\mathrm{P}_1 = X^2 + X, \mathrm{P}_2 = X^2 - X \text{ et } \mathrm{P}_3 = X^2 - 1.$$

1. *Montrer que $\mathscr{B} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.*
2. *Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, donner la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$ puis celle de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$.*
3. *Montrer que, dans cette base $\mathscr{B}$, les coordonnées d'un polynôme P sont $\left(\frac{\mathrm{P}(1)}{2}; \frac{\mathrm{P}(-1)}{2}; -\mathrm{P}(0)\right)$.*
4. *Quelle sont les coordonnées du polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ dans la base base $\mathscr{B}$.*
   On procèdera selon deux méthodes distinctes.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

1 Rappels et compléments sur les matrices

2 Généralités sur les espaces vectoriels
2.1 Définition
2.2 Familles de vecteurs
2.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré
2.2.2 Familles génératrices
2.2.3 Familles libres

3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

4 Dimension d'un espace vectoriel
4.1 Définition
4.1.1 Base
4.1.2 Dimension

5 Somme de sous-espaces vectoriels
5.1 Deux sous-espaces vectoriels
5.1.1 En dimension quelconque
5.1.2 En dimension finie
5.2 Plusieurs sous-espaces vectoriels
6 Hyperplans

Chap.2 : Applications linéaires

1 Définitions
2 Noyau et image