TSI2

Stage
Applications linéaires
Fiche 3

Représentation matricielle et rang

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer dim (Ker f) et rg (f)

Exercice 2

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes et interpréter le résultat

1. Dans $\mathbb{R}^4 : F=(x_1, x_2, x_3)$
   $x_1=(1,1,1,1)$; $x_2=(1,-1,1,-1)$ et $x_3=(1,0,1,0)$
2. Dans $\mathbb{R}^4 : F=(x_1, x_2, x_3, x_4)$
   $x_1=(1,1,0,1)$; $x_2=(1,-1,1,0)$; $x_3=(2,0,1,1)$ et $x_4=(0,2,-1,1)$
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $F=(P_1, P_2, P_3)$ où $P_1=X^2$; $P_2=X^2+2X$ et $P_3=X+1$
4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $F=(P_1, P_2, P_3)$ où $P_1=X^2+2X+1$; $P_2=X^2-X+1$ et $P_3=X^2-7X+1$

Exercice 3

Déterminer les matrices dans les bases canoniques et le rang des applications linéaires suivantes

1. $f_1 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \to (x-y, y-z) \end{matrix}$
2. $f_2 : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to x-5y+4z \end{matrix}$
3. $f_3 : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \to P-XP' \end{matrix}$
4. $f_4 : \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \to (P(-1), P(0), P(1)) \end{matrix}$

Exercice 4

Soient $B=(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1=(1,-2,0)$, $w_2=(-1,2,0)$, $w_3=(0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base : $u(e_1)=w_1$, $u(e_2)=w_2$, $u(e_3)=w_3$

1. Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de e_1 , e_2 et e_3 . En déduire la matrice de u dans B
2. Déterminer l'expression de u
3. Trouver une base de Ker (u) et une base de Im(u)
4. Montrer que ker(u) + Im (u) = $\mathbb{R}^3$
5. Déterminer K(u-Id) et Im (u – Id) où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que u-Id est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

Exercice 5

Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $B=(e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $B'=(e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille définie par $\begin{cases} e'_1=e_1+e_2-e_3 \\ e'_2=e_1-e_3 \\ e'_3=e_1-e_2 \end{cases}$

1. Montrer que B' est une base de E
2. On pose $D=Mat_{B'}(f)$. Déterminer la matrice D
3. On note P la matrice de passage de B à B'. Déterminer P et calculer P^{-1}
4. Quelle relation lie les matrice A,D ,P et P^{-1}
5. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 6

Soit $f\in L(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique B par $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Soit $C=(e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1=(1,0,1)$; $e'_2=(-1,1,0)$ et $e'_3=(1,1,1)$. Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de f dans C
3. Calculer la matrice de f^n dans B pour tout $n\in\mathbb{N}$