Devoir Surveillé 4

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. ***Courbe invariante par rotation.***

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Γ la courbe définie par la fonction vectorielle :

$$\vec{f} : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} .$$

On notera $M(t)$ le point du plan défini par $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$.

1. *Soit Γ_1 la partie de la courbe Γ correspondant à $t \in [0; \pi]$. Montrer que l'on peut obtenir toute la courbe Γ à partir de Γ_1. On précisera les transformations géométriques utilisées.*
2. *Montrer que la courbe Γ_1 présente deux points singuliers : $t = 0$ et $t = t_0$ à déterminer.*
3. *Construire un tableau comprenant les signes des dérivées x', y' sur $[0; \pi]$, les variations des fonctions x et y sur $[0; \pi]$, et les valeurs aux points remarquables.*
4. *Déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathscr{T}_0$ à Γ_1 au point $t = 0$, et montrer que ce point est un point de rebroussement de première espèce.*
5. *Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}_1$ à Γ_1 au point $t = t_0$, et montrer que ce point est également un point de rebroussement de première espèce.*
6. *Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3; 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.*
   (a) *Vérifier que la droite $\mathscr{T}_1$ passe par le point Ω.*
   (b) *Déterminer l'intersection $\Gamma \cap \mathscr{C}_1$.*
   (c) *Montrer que la courbe Γ et le cercle $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente au point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$.*
7. *Dans le repère $\mathscr{R}$, tracer les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, puis les tangentes à Γ aux points de paramètres $t = 0, t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ et $t = \pi$. Tracer ensuite la courbe Γ_1 en trait plein, et la compléter en pointillés jusqu'à obtenir Γ. On fera apparaitre tous les points remarquables.*

8. *Montrer que pour tout réel* t, *le point* $M\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)$ *est l'image du point* $M(t)$ *par la rotation* r *de centre* Ω *et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$.
9. *Calculer la longueur de la courbe* Γ.

Exercice 0.2. ***La fonction Dilogarithme***
On considère la fonction f *définie sur* $]-\infty,1[$ *par :*

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & si\ t\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ 1 & si\ t=0 \end{cases}.$$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $]-\infty,1[$.

   La question précédente montre que f *possède des primitives sur l'intervalle* $]-\infty,1[$.
   On appelle ***fonction Dilogarithme*** *la primitive de* f *nulle en 0 , c'est-à-dire la fonction :*

$$L:]-\infty,1[\to\mathbb{R},\quad L(x)=\int_0^x f(t)dt$$

2. *Rappeler (sans démonstration) le développement en série entière de* $t\mapsto\frac{1}{1-t}$, *ainsi que son domaine réel de validité.*
3. *En déduire le développement en série entière de* $t\mapsto-\ln(1-t)$, *ainsi que son domaine réel de validité. On précisera soigneusement le théorème utilisé.*
4. *Montrer que* f *est développable en série entière sur un intervalle ouvert à préciser, et donner son développement.*
5. *En déduire que* $L(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$ *pour tout* $x\in]-1;1[$.

Exercice 0.3. *On dit qu'une matrice* N *carrée d'ordre* n *est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel* k *no nul tel que*

$$N^{k-1}\neq 0_n\ et\ N^k=0_n$$

où 0_n *représente la matrice carrée nulle d'ordre* n. *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n, *on dit que le couple* (Δ,N) *est une* ***décomposition de Dunford*** *de* A *lorsque :*

$$\begin{cases} \Delta\ est\ une\ matrice\ diagonalisable \\ N\ est\ une\ matrice\ nilpotente \\ \Delta N=N\Delta\ et\ A=N+\Delta \end{cases}$$

1. *On pose :*

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad et\quad N=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) *est une décomposition de Dunford de* A.
Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) *Déterminer les valeurs propres de* A.

 (b) *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

3. *On considère les matrices colonnes :*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

 (a) *Calculer les produits* $\Delta X_1, \Delta X_2$ *et* ΔX_3.

 (b) *Justifier que la matrice* Δ *est diagonalisable et déterminer une matrice* P *inversible telle que :* $\Delta = PDP^{-1}$.

 (c) *Calculer* P^{-1}.

4. (a) *Établir que* N *est une matrice nilpotente.*

 (b) *Vérifier que* (Δ, N) *est une décomposition de Dunford de la matrice* A.

 (c) *En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de* A^n *en fonction des puissances de* Δ*, de* N *et de* n.

 (d) *Établir que : pour tout entier naturel* $k \geqslant 1, \quad \Delta^k N = N$.

 (e) *Proposer une décomposition de Dunford de* A^n.