Programme de khôlle 21

Semaine du 18 mars 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$. Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes :
   (a) $\varphi : (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$
   (b) $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$
   (c) $\varphi : (u, v) \mapsto \left(\frac{u^2+3v}{2}, sin(v)\right)$
2. (a) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :
   $$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
   On pourra utiliser le changement de variables :
   $$(u, v) = (2x + y, 3x + y).$$
   (b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :
   $$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$
   On pourra utiliser le changement de variables :
   $$(u, v) = (x + y, 2x + 3y).$$
   (c) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant :
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
   On pourra utiliser le changement de variables :
   $$(u, v) = (x + y, x - y).$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.*

1. *Quelle est la loi de X ?*
2. *Soit $i \in X(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.*
3. *Déterminer la loi de Y et $E(Y)$. (On laissera le résultat de $\mathbb{P}(Y = j)$ exprimé a l'aide d'une somme.)*
4. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
5. *Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.*

Exercice 2.2. *On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in \,]0, 1[$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1 - p$.*
On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par familles, et Y celle du nombre de garçons.

1. *Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).*
2. *En déduire la loi de X et celle de Y.*

Exercice 2.3. *Le nombre de visiteurs quotidiens dans un parc d'attraction suit une loi de Poisson de paramètre* 10000.
Chaque visiteur entre dans le parc par une des dix entrées $E_1, \ldots, E_{10}$, qu'il choisit de manière équiprobable et indépendamment des autres visiteurs.

1. *Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.*
2. *On désigne par N le nombre de visiteurs en une journée et X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 durant cette journée.*
   (a) *Déterminer la loi conditionnelle à $[N = n]$ de X_1.*
   (b) *En déduire la loi conjointe de N et X_1, puis la loi de X_1.*
   (c) *En déduire l'espérance et la variance de X_1.*
3. *Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par E_1 par jour.*

Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance

1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies
1.1 Loi d'un couple
1.2 Lois marginales
1.3 Loi conditionnelle
1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.
1.5 n variables aléatoires

2 Indépendance de V.A.R. finies
2.1 Deux variables 2.2 n variables

3 Somme et produit de deux V.A.R. finies
3.1 Espérance
3.2 Somme de lois de Bernoulli
3.3 Covariance

Chap.16 : Fonctions de plusieurs variables

1 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$
1.1 Norme et distance
1.2 Parties ouvertes, parties fermées
1.3 Intérieur, extérieur

2 Limite, continuité
2.1 Définitions
2.2 Propriétés

3 Calcul différentiel
3.1 Dérivées partielles 3.1.1 D'ordre 1
3.1.2 D'ordre 2
3.2 Gradient
3.3 Composées classiques

4 Équations aux dérivées partielles

5 Extremums d'une fonction de deux variables
5.1 Définitions, propriétés
5.2 Méthode de recherche des extremums globaux sur une partie fermée et bornée

6 Applications géométriques
6.1 Courbes du plan
6.2 Surfaces
6.2.1 Définitions, plan tangent
6.2.2 Position d'une surface d'équation $z = g(x, y)$ par rapport à son plan tangent