Interrogation 3 - CORRECTION

Durée : 20 minutes
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *Compléter :*

- $\forall \theta \in [0;\pi]\,, arccos(cos(\theta)) = \theta$
- $\forall x \in [-1;1]\,, cos(arccos(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\,, arcsin(sin(\theta)) = \theta$
- $\forall x \in [-1;1]\,, sin(arcsin(x)) = x$

Exercice 0.2. *Calculer en justifiant :*

1. $arccos(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = arccos(cos(\frac{5\pi}{6})) = \frac{5\pi}{6} \in [0;\pi]$
2. $arccos(cos(\frac{5\pi}{4})) = arccos(cos(\frac{3\pi}{4})) = \frac{3\pi}{4} \in [0;\pi]$
3. $arccos(cos(\frac{-7\pi}{4})) = arccos(cos(\frac{-7\pi}{4} + 2\pi))$
   $= arccos(cos(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4} \in [0;\pi]$
4. $arcsin(sin(\frac{5\pi}{3})) = arcsin(sin(\frac{5\pi}{3} - 2\pi))$
   $= arcsin(sin(\frac{-\pi}{3})) = \frac{-\pi}{3} \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
5. $arcsin(sin(\frac{5\pi}{4})) = arcsin(sin(\frac{-\pi}{4})) = \frac{-\pi}{4} \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 0.3. *Simplifier $sin(2arccos(x))$ pour $x \in [-1;1]$.*

On utilise la formule de duplication :

$$sin(2arccos(x)) = 2sin(arccos(x))cos(arccos(x)) = 2xsin(arccos(x))$$

Or $cos^2(arccos(x)) + sin^2(arccos(x)) = 1$ donc $sin^2(arccos(x)) = 1 - x^2$. Il vient : $sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} > 0$.
En effet : $arccos(x) \in [0;\pi]$ donc $sin(arccos(x)) > 0$.
Finalement :

$$sin(2arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 0.4. *Soit la fonction f définie par $f(x) = arccos(1-2x)$.*

1. *Déterminer le domaine de définition de la fonction f.*
   $D_f = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq 1 - 2x \leq 1\}$
   Or $-1 \leq 1-2x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.
   Donc : $D_f = [0;1]$
2. *Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f puis déterminer $f'(x)$.*
   f est dérivable sur $]0;1[$ *avec :*

$$f'(x) = -\frac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}$$

3. *Dresser le tableau de variation de la fonction f (on déterminera les limites aux bornes).*
   $f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $[0;1]$.
   $f(0) = arccos(1) = 0$ *et* $f(1) = arccos(1-2) = arccos(-1) = \pi$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	*0*		π