Chap.9 : Séries entières

Table des matières

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des séries dépendants d'un paramètre réel ou complexe de la forme $\sum a_n z^n$ (le paramètre étant z, les a_n sont des données de l'énoncé). Ces séries représentent une généralisation de la notion de polynôme.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux valeurs de z pour lesquelles cette série est convergente puis dans un second temps nous nous verrons ces séries comme des fonctions de la variable z.

Les séries entières sont de très bons outils pour la résolution des équations différentielles ainsi que pour certains calculs en probabilités.
Notations : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On rappelle que l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1 Convergence d'une série entière

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- *Pour* $z \in \mathbb{C}$, *la série numérique* $\sum a_n z^n$ *est appelée* ***série entière*** *de la variable* z.
- *L'ensemble* $D = \{z \in \mathbb{C}$ *tels que la série* $\sum a_n z^n$ *converge* $\}$ *est appelé le* ***domaine de convergence de la série entière****.*
- *En notant* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *pour tout* $z \in D$, *on obtient ainsi une fonction de la variable complexe* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *appelée la* ***fonction somme de la série entière****.*

Remarque 1.2.

- *Les sommes partielles d'une série entière sont des polynômes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}_n[z]$$

Les séries entières sont donc des limites de suites de polynômes, mais ce ne sont pas des polynômes en général !

- *On adopte la convention suivante :* $0^0 = 1.z = 0$ *est donc toujours dans le domaine de convergence car la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n 0^n$ *converge (les sommes partielles sont constantes et égales à* a_0 *).*
On a donc : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$.
- *Lorsque la variable est réelle, on notera plutôt* $\sum a_n x^n$.

1.2 Premiers exemples

Exemple 1.3. *La série géométrique* $\sum z^n$ *est une série entière (on a ici* $a_n = 1$ *pour tout* n *), qui converge lorsque* $|z| < 1$ *et diverge lorsque* $|z| \geqslant 1$*.*
Le domaine de convergence de la série entière $\sum z^n$ *est donc*

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}.$$

C'est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1*.*
La fonction somme de cette série entière est :

$$\forall z \in D_1, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Application 1.4. *On considère la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ *(ici* $a_n = \frac{1}{n^2}$ *pour* $n \geqslant 1$ *et* $a_0 = 0$ *).*
Déterminer le domaine de convergence de cette série.

Application 1.5. *On considère la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$*.*
Déterminer le domaine de convergence de cette série.

Application 1.6. *On considère la série* $\sum\limits_{n\geq 1} n^n z^n$*.*

Déterminer le domaine de convergence de cette série.

Remarque 1.7. *On observe donc sur ces exemples que le domaine de convergence d'une série entière semble être un "disque", de rayon éventuellement infini ou nul, qui peut contenir ou non sa frontière.*

1.3 Rayon de convergence

Commençons par mettre en évidence une propriété géométrique importante des séries entières : l'existence d'un "rayon de convergence" et d'un "disque ouvert de convergence".

Théorème 1.8. *Lemme d'Abel*
S'il existe un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve :

Proposition 1.9. *L'ensemble $I = \{r \geqslant 0, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de minimum 0.*
On appelle parfois I l'intervalle de bornitude.

Trois cas de figure se présentent donc :

- l'intervalle I n'est pas majoré, et donc $I = [0; +\infty[$;

- l'intervalle I est majoré et fermé, et donc $I = [0; R]$, avec $R = \sup(I) \geqslant 0$;
- l'intervalle I est majoré et ouvert, et donc $I = [0; R[$, avec $R = \sup(I) > 0$

Définition 1.10. *Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière. On pose :*

$$R = \sup(I) = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ / \textit{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée}\right\}$$

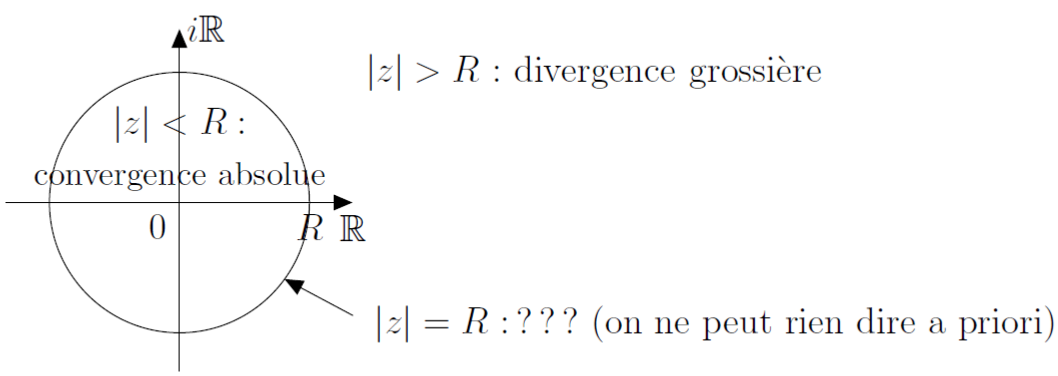
*(éventuellement $R = +\infty$ si l'intervalle de bornitude I n'est pas majoré). Cet élément $R \in [0, +\infty]$ est appelé le **rayon de convergence de la série entière** $\sum a_n z^n$.*

Remarque 1.11.
- *R est soit un réel positif ou nul soit égal à $+\infty$.*
- *La borne supérieure d'un ensemble n'est pas nécessairement atteinte : cela signifie que même si R est un réel, la suite $(a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement bornée.*

Exemple 1.12. *Pour la série géométrique $\sum z^n$, le rayon de convergence est égal à 1 .*

Théorème 1.13. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$.*

1. *Si $R \in]0; +\infty[$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:*
$$\begin{cases} |z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n \textit{ converge absolument} \\ |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n \textit{ diverge grossièrement} \end{cases}$$
2. *Si $R = +\infty$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
3. *Si $R = 0$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (et converge pour $z = 0$ bien entendu).*



Preuve :

Définition 1.14. *Soit une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et* $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \in]0, +\infty[$ *(non nul et fini). On appelle :*

- ***disque ouvert de convergence*** *le disque ouvert de centre* O *et de rayon* R*, c'est-à-dire l'ensemble :*

$$\mathscr{D}(O, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\} \,;$$

- ***cercle d'incertitude*** *(ou parfois cercle de convergence) le cercle de centre* O *et de rayon* R*, c'est-à-dire l'ensemble :*

$$\mathscr{C}(O, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\} \,;$$

- *intervalle ouvert de convergence l'intervalle* $]-R; R[$

Remarque 1.15.

- *On dira souvent disque de convergence et intervalle de convergence (le terme ouvert sera sousentendu).*
- *Si* $R = +\infty$*, le disque ouvert de convergence est en fait* $\mathbb{C}$ *.*
- *Si* $R = 0$ *alors le disque ouvert de convergence est vide.*
- *Sur le cercle de centre* O *et de rayon* R*, il n'y a pas nécessairement convergence, tout peut se produire (voir les exemples). C'est pourquoi on l'appelle le "cercle d'incertitude".*
- ***ATTENTION ! ! !*** *Le disque ouvert de convergence est inclus dans le domaine de convergence, mais pas nécessairement égal : ne pas les confondre !*

  En notant D *le domaine de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *et* R *son rayon de convergence, on a donc :*

$$\mathscr{D}(O, R) \subset D \subset \overline{\mathscr{D}}(O, R)$$

  et les deux inclusions peuvent être strictes.

2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

2.1 Utilisation du critère de D'Alembert

L'énoncé du critère de D'Alembert pour les séries entières n'est pas au programme de TSI.
Pour contourner cela nous allons nous ramener à l'étude d'une série numérique.
ATTENTION !!! La rédaction pour l'utilisation du critère de D'Alembert doit être extrêmement rigoureuse. Les jurys de concours n'acceptent jamais une rédaction bâclée.

Méthode 2.1. *Voici la rédaction à adopter :*
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \ldots\ldots$, on pose $u_n = |\ldots\ldots\ldots|$.
On a bien $u_n > 0$, et de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ldots\ldots$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ldots\ldots\ldots$
Trois cas se présentent alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$: *comme $0 < 1$, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \ldots\ldots$ est absolument convergente.*
  On en déduit donc que $R = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$: *comme $+\infty > 1$, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum \ldots\ldots$ est grossièrement divergente.*
  On en déduit donc que $R = 0$.
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un résultat dépendant de z alors on trouve des conditions sur z pour savoir si la série $\sum_n \ldots$ est absolument convergente et on en déduit donc le rayon de convergence.*

Application 2.2. *Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$.*

Application 2.3. *Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{4^n}{n^2} z^{2n}$.*

2.2 Quelques astuces

Théorème 2.4. ***Caractérisations du rayon de convergence***
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors on a :

$R = \sup\left\{r \geqslant 0/ \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \right\}$
$= \sup\left\{r \geqslant 0/ \text{ la série } \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente } \right\}$
$= \sup\left\{r \geqslant 0/ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\right\}$

Preuve :
Par définition, $R = \sup\{r \geqslant 0/ \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée }\}$.
Montrons maintenant que les trois ensembles ont la même borne supérieure.
Notons :

- $A = \{r \geqslant 0/ \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée;}$
- $B = \{r \geqslant 0/ \text{ la série } \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente;}$
- $C = \{r \geqslant 0/ \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\}$

On sait que si la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0.$$

Donc $B \subset C$.
De plus si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Donc $C \subset A$.
On a donc $\sup B \leqslant \sup C \leqslant \sup A$.
Il nous reste donc à montrer que $\sup A \leqslant \sup B$ pour avoir l'égalité des trois bornes supérieures.
Supposons par l'absurde que $\sup A > \sup B$.
On peut alors trouver deux réels r et r' tels que $\sup A > r > r' > \sup B$.
Comme $r < \sup A$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
De plus $r' < r$ donc, d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n (r')^n$ est absolument convergente.
Donc $r' \in B$ ce qui contredit $r' > \sup B$.
Ainsi, $\sup A = \sup B = \sup C$.

Méthode 2.5. *Il est difficile de dresser une liste exhaustive de toutes les méthodes possibles.*
En voici tout de même quelques unes :

- *Si* $\sum a_n z_0^n$ *converge alors* $R \geqslant |z_0|$ *; En effet, si on avait* $R < |z_0|$*, alors la série* $\sum a_n z_0^n$ *divergerait (grossièrement), ce qui n'est pas le cas ici ;*
- *Si* $\sum a_n z_0^n$ *diverge alors* $R \leqslant |z_0|$ *; En effet, si on avait* $R > |z_0|$*, alors la série* $\sum a_n z_0^n$ *convergerait absolument, ce qui n'est pas le cas ici ;*
- *Si pour tout* $r < \alpha$ *la suite* $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée alors* $R \geqslant \alpha$ *;*
- *Si pour tout* $r < \alpha$ *la série* $\sum a_n r^n$ *est absolument convergente alors* $R \geqslant \alpha$ *;*
- *Si pour tout* $r > \alpha$ *la suite* $\left(\overline{a}_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas bornée alors* $R \leqslant \alpha$ *;*
- *Si pour tout* $r > \alpha$ *la série* $\sum a_n r^n$ *est divergente alors* $R \leqslant \alpha$*.*

Application 2.6. *Déterminer le rayon de convergence de la série* $\sum \sin(n) z^n$*.*

Proposition 2.7. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*.*
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$*, la série entière* $\sum \lambda a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* R

Proposition 2.8. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectifs* R_a *et* R_b*.*
Notons R *le rayon de convergence de* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *:*

- *Si* $R_a \neq R_b$*, alors* $R = \min(R_a, R_b)$ *;*
- *Si* $R_a = R_b$*, alors* $R \geqslant R_a$*.*

Preuve :

Proposition 2.9. *Les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum n a_n z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Proposition 2.10. *Les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n} z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Application 2.11. *Déterminer les rayons de convergence des séries* $\sum n z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.

Remarque 2.12. *On montre aisément par récurrence que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *les séries entières* $\sum a_n z^n$, $\sum n^p a_n z^n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^p} z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

2.3 Par comparaison

Proposition 2.13. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_a *et* R_b.
Si à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, *alors* $R_a \geqslant R_b$.

Preuve :

Application 2.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de diviseur positifs de n.*
Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$.

Proposition 2.15. *Soient $\sum a_n z^n, \sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ trois séries entières.*

Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0, \quad |b_n| \leqslant |a_n| \leqslant |c_n| \\ \sum b_n z^n \text{ et } \sum c_n z^n \text{ ont le même rayon de convergence } R \end{array} \right.$

alors $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

Application 2.16. *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} n^{(-1)^n} z^n$?*

2.4 Par équivalence

Proposition 2.17. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.*
Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors les deux séries entières ont le même rayon de convergence.

Application 2.18. *Déterminer le rayon de convergence de $\sum \arctan(n) z^n$.*

3 Cas d'une série entière d'une variable réelle

3.1 Fonction somme

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $R \in \overline{\mathbb{R}}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

On s'intéresse dans cette partie à la fonction de la variable réelle définie, sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On rappelle que l'intervalle ouvert de convergence de la série entière est :

- $]-R; R[$ si $R \in \mathbb{R}^*$;
- $\emptyset$ si $R = 0$;
- $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$.

,

Le domaine de définition de f peut être :

- $D_f = \{0\}$ si $R = 0$;
- $D_f = \mathbb{R}$ si $R = +\infty$;
- $D_f =]-R;R[$ ou $]-R;R]$ ou $[-R;R[$ ou $[-R;R]$ si $R \in \mathbb{R}^*$.

Exemple 3.1. *1. La fonction f définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ est définie sur* $]-1;1[$.

2. La fonction g définie par $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est définie sur $[-1;1]$.

3. La fonction h définie par $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est définie sur $[-1;1[$.

3.2 Continuité, dérivabilité

Théorème 3.2. ***Continuité***
La fonction f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $]-R;R[$.

Théorème 3.3. ***Dérivation terme à terme***
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant la série terme à terme.
Pour tout $x \in]-R;R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\right)$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\dots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

Application 3.4. *Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.*

3.3 Intégration terme à terme

Théorème 3.5. ***Intégration terme à terme***
On peut intégrer terme à terme la série entière $\sum a_n x^n$ sur tout segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence :

$$\forall(\alpha,\beta) \in]-R;R[^2, \quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\int_\alpha^\beta a_n x^n \, \mathrm{d}x}_{\frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})}$$

Remarque 3.6. *On utilisera très souvent l'intégration terme à terme sous la forme :*

$$\forall x \in]-R;R[\,, \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Application 3.7. *Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, pour tout $x \in]-1;1[$.*

Remarque 3.8. ***ATTENTION ! ! !***
Les séries entières :

$$\sum_{n=0} a_n z^n \text{ et } \sum_{n=0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

ont le même rayon de convergence (puisque l'une est la série dérivée de l'autre) mais elles peuvent se comporter différemment aux bords de l'intervalle de convergence.
Par exemple, considérons la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$*(de rayon de convergence* $R=1$*) :*

- *elle diverge pour* $x=1$ *(c'est la série harmonique),*
- *mais sa "série primitive"* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ *converge pour* $x=1$ *(série de Riemann d'exposant* >1*).*

4 Développement d'une fonction en série entière

Objectif : Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0, existe-t-il une série entière dont f est la somme ?
Autrement dit peut-on trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,?$$

Dans toute cette partie f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 .

4.1 Mise en place

Définition 4.1. *On dit que f est* ***développable en série entière*** *au voisinage de* 0 *(abréviation DSE) s'il existe* $\alpha>0$ *tel que* $]-\alpha;\alpha[\subset I$*, ainsi qu'une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R\geqslant\alpha$ *telle que :*

$$\forall x\in\,]-\alpha;\alpha[\,,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Application 4.2. *Montrer que la fonction* $x\mapsto f(x)=\frac{1}{2x+1}$ *est développable en série entière au voisinage de 0.*

Analyse du problème : Lorsque f est effectivement développable en série entière, plusieurs questions se posent :

- Les coefficients a_n sont-ils uniques ? Comment déterminer ces coefficients ?
- Quelles sont les fonctions développables en série entière ?

Proposition 4.3. *Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.*
S'il existe $0 < \alpha \leqslant \min(R_a, R_b)$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\alpha;\alpha\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$

Autrement dit, si deux séries entières sont égales sur un intervalle non réduit à $\{0\}$ alors leurs coefficients sont égaux.
Si une fonction est développable en série entière alors son développement donc est unique.

Proposition 4.4. *Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha;\alpha[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Preuve :

Cette propriété nous donne donc la valeur de a_n lorsqu'une fonction est DSE et aussi une premiere condition nécessaire pour qu'une fonction soit DSE : elle doit être de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque 4.5. ***Conséquence et questions***
On vient donc de voir que si f est développable en série entière alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha;\alpha[$ et son DSE est :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

On appelle cette série ***la série de Taylor de*** *f.*
Pour toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0 on peut construire la série de Taylor.
Il reste maintenant à déterminer, parmi toutes les fonctions qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, quelles sont les fonctions dont la série de Taylor a un rayon de convergence non nul et telles que la somme de la série de Taylor est égale à $f(x)$.

Pour cela, nous pouvons utiliser la formule de Taylor reste intégral : si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I alors :

$$\forall x\in I,\forall p\in\mathbb{N},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{p}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{\int_0^x\frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt}_{R_p(x)}$$

Le problème du développement en série entière consiste donc à prouver que, pour $x\in]-\alpha;\alpha[$, $R_p(x)$ tend vers 0 lorsque $p\to+\infty$.

Remarque 4.6.
- *Il est difficile en TSI de donner des contres-exemples mais il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence nul ou alors dont la somme de la série de Taylor n'est pas égale à $f(x)$.*
- ***ATTENTION !!!*** *L'implication :*

  " f est développable en série entière $\Longrightarrow f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0ˇ

  est vraie mais pas la réciproque !
  Les fonctions développables en série entière sont bien plus que de simples fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Théorème 4.7. *Les fonctions $u\mapsto\frac{1}{1-u}, u\mapsto\ln(1+u), u\mapsto \mathrm{e}^u, u\mapsto(1+u)^\alpha(\alpha\in\mathbb{R}), x\mapsto\cos(u)$ et $x\mapsto\sin(u)$ sont développables en série entière au* *voisinage de 0 et on a :*

$$\forall u \in]-1;1[, \tfrac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

$$\forall u \in]-1;1[, \quad \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^u = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{u^n}{n!}$$

$$\forall u \in]-1;1[, \quad (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \sin(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}$$

Remarque 4.8. ***ATTENTION ! ! !***
Ne pas confondre DL en 0 et DSE ! Pour une fonction $\mathscr{C}^\infty$:

- *Un DL_n en 0 est une formule locale : elle signifie juste que le reste de Taylor-Young est de la forme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, elle ne donne aucun renseignement global (comme des majorations, etc...).*
- *Un DSE est une formule globale, c'est-à-dire que c'est une égalité valable sur un intervalle tout entier.*

4.2 Méthodes de développement en série entière

Voici une liste, non exhaustive, de méthodes permettant de calculer le DSE d'une fonction donnée.

4.2.1 Combinaison linéaire de fonctions usuelles

Une conséquence des propriétés 3 et 4 est que toute combinaison linéaire de fonctions développables en séries entières est développable en série entière sur le plus petit des intervalles entrants en jeu.

Application 4.9. *On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer son développement en série entière.*

4.2.2 DSE de la dérivée

Il est parfois plus facile de déterminer le DSE de f' que directement celui de f.
On revient alors à f à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.

Application 4.10. *Déterminer le développement en série entière de :*

$$x \mapsto \arctan(x).$$

4.2.3 Solution d'un problème de Cauchy

L'idée ici est de remarquer que f est solution d'une équation différentielle linéaire et on utilise alors cette équation différentielle pour déterminer la valeur des a_n.

Application 4.11. *Démontrer le DSE de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$.*
On pourra remarquer que la fonction f est l'unique solution du problème de Cauchy suivant : $(E)\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

5 Application des développements en série entière

5.1 Calcul de la somme d'une série entière

Dans la partie précédente nous avons vu comme exprimer une fonction donnée comme somme d'une série entière.

Il est aussi possible de faire l'exercice inverse : exprimer la somme d'une série entière donnée à l'aide des fonctions usuelles.

Application 5.1. *Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme de la série* $\sum \frac{n^2+3n+1}{n!}x^n$.

5.2 Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle

Application 5.2. *Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :*

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 1$$

6 Exponentielle complexe

En première année, l'exponentielle d'un nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ a été définie par :

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$$

Voici une autre façon de définir l'exponentielle complexe :

Théorème 6.1. *Définition de l'exponentielle complexe*
La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle du nombre complexe z, noté $\exp(z)$ ou e^z, est défini par :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Remarque 6.2.

- *On a vu dans les premiers exemples du cours que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$.*
- *Avec cette nouvelle définition on retrouve très facilement le fait que :*

  $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos(y) + \mathrm{i}\sin(y).$$

  Toutefois, pour faire le lien avec la définition de première année il faut encore admettre que si z et z' sont deux complexes :

$$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

La preuve de cette égalité nécessite la notion de produit de séries pour pouvoir le démontrer.