Pour le 22 septembre 2023
Devoir-Maison 2 - CORRECTION

Exercice 0.1. *La couleur et l'intensité de la lumière peuvent être représentées par deux vecteurs colonnes C et I où :*

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{lcl} r & : & \textit{intensité de la composante rouge} \\ g & : & \textit{intensité de la composante verte} \\ b & : & \textit{intensité de la composante bleue} \end{array}$$

$$\textit{et } \mathrm{I} = \begin{pmatrix} i \\ \ell \\ c \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{lcl} i & : & \textit{intensité de la lumière avec : } \quad i = \frac{r+g+b}{3} \\ \ell & & \textit{intensité des ondes longues avec : } \ell = r - g \\ c & : & \textit{intensité des ondes courtes avec : } c = b - \frac{r+g}{2} \end{array}$$

La rétine d'un œil humain est composée de deux types de récepteurs : les cônes et les batônnets.
Les premiers sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite scotopique et vision à niveaux de gris) et ne voient pas les couleurs. Ils mesurent l'intensité i de la lumière visible.
Les seconds sont responsables de la vision diurne colorée.
La vision des couleurs n'est pas toutefois directe, mais est envoyée au cerveau au moyen d'un signal nerveux.

1. *Déterminer une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AC} = \mathrm{I}$.*
2. *Calculer l'inverse de A.*
3. *Donner les composantes r, g et b en fonction de i, ℓ et c.*

1. La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ est telle que :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r+g+b}{3} \\ r-g \\ b - \frac{r+g}{2} \end{pmatrix}.$$

C'est à dire que l'on a bien $\mathrm{AC} = \mathrm{I}$.

2.On inverse la matrice A par l'algorithme de Gauss : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \frac{3}{2}\,\mathrm{L}_1}}{\sim_{\mathrm{L}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \frac{2}{3}\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \frac{2}{9}\,\mathrm{L}_3}}{\sim_{\mathrm{L}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{6} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow 3\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3. Puisque $AC = I$, on en déduit que $C = A^{-1}I$, ce qui donne :

$$C = \begin{pmatrix} i + \frac{\ell}{2} - \frac{c}{3} \\ i - \frac{\ell}{2} - \frac{c}{3} \\ i + \frac{2}{3}c \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.2. *On pose* $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ *et :*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = -y = z \right\}$$

1. *Montrer que E et F sont des espaces vectoriels.*
2. *Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.*
3. *Soit $u = (1, 2, 3)$. Quelle est la projection de u sur E parallèlement à F ?*

1. On remarque que $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3} \in E$, donc en particulier E est non vide.

   Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}^2$.

   Montrons que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ appartient à E.

   Nous avons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{x + \lambda x'}_{X} \\ \underbrace{y + \lambda y'}_{Y} \\ \underbrace{z + \lambda z'}_{Z} \end{pmatrix}$.

   Or $X + Y + Z = x + y + z + \lambda (x' + y' + z')$.

   De plus $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ donc $x + y + z = 0$.

Pour les mêmes raisons, $x' + y' + z' = 0$. Ainsi, $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in E$ donc, d'après la caractérisation, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donc un espace vectoriel.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors : $\vec{u} \in F \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix}$ car $\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$
$\Leftrightarrow \vec{u} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi : $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc un espace vectoriel.

2. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u} \in E \cap F \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = -y \\ z = -y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x = -y \\ z = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -y = 0 \\ z = -y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Ainsi, $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

On commence par déterminer une famille génératrice de E.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors : $\vec{u} \in E \quad \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}$ car $z = -x - y \Leftrightarrow \vec{u} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi : $E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Par conséquent : $E + F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On montre que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ forme

donc une base de $\mathbb{R}^3$ donc : $Vect\left(\left(\begin{array}{r}1\\0\\-1\end{array}\right),\left(\begin{array}{r}0\\1\\-1\end{array}\right),\left(\begin{array}{r}-1\\1\\-1\end{array}\right)\right)=$ $\mathbb{R}^3$.
Ainsi : $E+F=\mathbb{R}^3$.
Des deux points précédents,nous en déduisons que E et F sont supplémentaires.

3. On cherche $(\lambda_{1,2}, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u=\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,-1)+\lambda_3(-1,1,-1)$$

On a alors $p(u)=\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,-1)$.
On obtient :

$$p(u)=(-5,8,-3)$$