Programme de khôlle 16

Semaine du 27 janvier 2025

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. *lancers_succ()* qui renvoie le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6 lors de la succession de lancers indépendants d'un dé cubique équilibré.
2. *moyenne_lancers(n)* qui renvoie la moyenne des résultats lorsqu'on réalise n fois l'expérience précédente.
A qu'elle valeur s'attendre lorsque n devient très grand ?
3. *uplets(n, N)* qui reçoit en argument deux entiers n et N et qui renvoie le n -uplet défini par l'expérience suivante : une urne contient N jetons numérotés de 1 à N . On effectue n tirages successifs avec remise, et on note sous forme de n -uplet le résultat de ces n tirages.

2 Pratique calculatoire

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Calculer la distance de X^2 à $\text{Vect}(1, X)$
2. Calculer la distance de X à $\text{Vect}(1, X^3)$
3. Calculer la distance de $1 + X^2$ à $\text{Vect}(X, X^2)$.

Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 5.1 corrigé en TD pour obtenir les projetés orthogonaux.

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F .
3. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1, 1, 1, -1)$ sur F et en déduire la distance $d(u, F)$.

Exercice 3.2. 1. Soit E un espace préhilbertien réel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $\vec{u} \in E$, $\langle \vec{u} \mid f(\vec{u}) \rangle = 0$.

- (a) Pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$, simplifier $\langle \vec{u} + \vec{v} \mid f(\vec{u} + \vec{v}) \rangle$ et en déduire que $\langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle = -\langle \vec{v} \mid f(\vec{u}) \rangle$.
- (b) En déduire que :

$$\ker(f) = (\text{Im}(f))^\perp$$

2. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

On pose $F = \text{Vect}(1, X)$. Calculer $d(X^2, F)$.

Exercice 3.3. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G .
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G .
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E . Déterminer la distance de x à G .

Chap.11 : Espaces préhilbertiens réels

1 Généralités sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

- 1.3 Norme euclidienne
- 1.4 Distance euclidienne

2 Orthogonalité

- 2.1 Vecteurs orthogonaux
- 2.2 Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel
- 2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux
- 2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel
- 2.5 Propriétés importantes

3 Bases orthonormales

- 3.1 La théorie
- 3.2 La pratique
- 3.3 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée
- 3.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée

4 Projection orthogonale

- 4.1 Supplémentaire orthogonal
- 4.2 Projection orthogonale
- 4.3 Distance d'un point à un s-e-v de dimension finie

Chap.12 : Variables aléatoires réelles discrètes

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

- 1.1 Définition, propriétés
- 1.2 Loi d'une VAR discrète
- 1.3 Fonction de répartition
- 1.4 Fonction d'une variable aléatoire

2 Moments d'une VAR discrète

- 2.1 Espérance
- 2.2 Variance et écart type