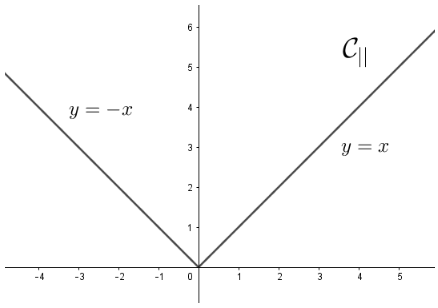
Chap.9 : Fonctions usuelles

1 Fonction valeur absolue

Définition 1.1. *La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe la distance entre 0 et x. On note $\mid x \mid$ la valeur absolue de x.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue :



Proposition 1.2.

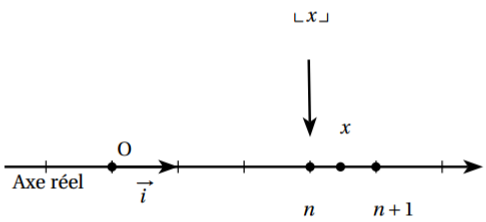
- *La fonction valeur absolue est paire.*
- *La fonction valeur absolue est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mid x \mid = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \mid x \mid = +\infty$

2 La fonction partie entière

Proposition 2.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif n tel que :*

$$n \leq x < n+1$$

Cet entier est noté $\lfloor x \rfloor \leq x$.

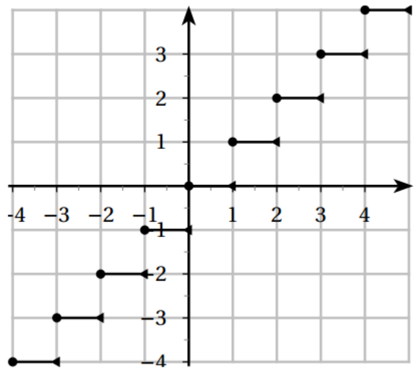


Exemple 2.2. *Si $x = \pi$, l'unique entier relatif qui convient est 3 car : $3 \leq \pi < 4$ donc $\lfloor \pi \rfloor = 3$.*
Si $x = -\sqrt{2}$, l'unique entier relatif qui convient est -2 car $-2 \leq -\sqrt{2} < -1$ donc $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$.

Définition 2.3. *On appelle **partie entière** l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, notée $\lfloor \cdot \rfloor$, qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

La courbe de la fonction partie entière est la suivante, elle est dite "en escaliers" :



Application 2.4. *Déterminer les parties entières suivantes :*

- $\lfloor \frac{8}{3} \rfloor =$
- $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor =$
- $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor =$
- $\lfloor \frac{-9}{4} \rfloor =$
- $\lfloor -\pi \rfloor$

Proposition 2.5.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lfloor \cdot \rfloor$ *est croissante (mais non strictement croissante)*

Application 2.6. *Montrer que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$

3 La fonction exponentielle

Définition 3.1. *Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

cette fonction est appelée ***fonction exponentielle****, on la note exp.*

Remarque 3.2. *On déduit de la définition de exp que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, exp(-x) \times exp(x) = 1$$

et que exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3. ***Relation fondamentale de l'exponentielle***

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$$

Preuve : On étudie la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = exp(a+x) \times exp(-x)$$

Proposition 3.4.
- $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) > 0$.
- *La fonction exp est strictement croissante.*
- $\lim_{x \to -\infty} exp(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$

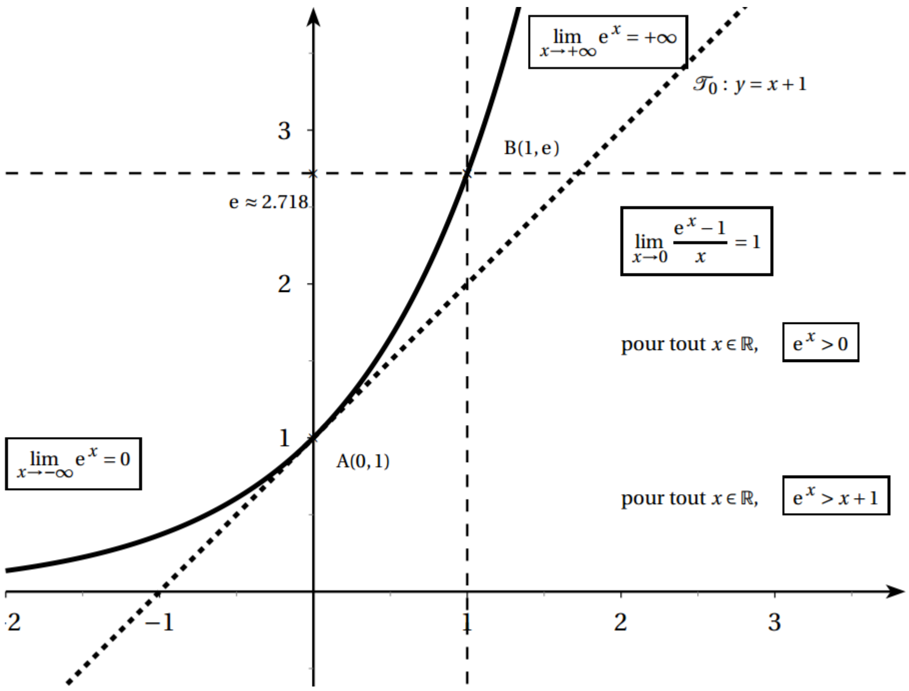
Remarque 3.5. *L'image par exp de 1 est notée e. On a $e \approx 2,718$*

Application 3.6. *Démontrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, exp(n) = e^n$$

Cette égalité justifie la notation $exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La courbe représentative de la fonction *exp* est la suivante :



Proposition 3.7. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:*

- $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ *et* $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, e^{na} = (e^a)^n$

Remarque 3.8. *La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^y$.*

4 La fonction logarithme népérien

Définition 4.1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui à tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe l'unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^y$ est appelée la fonction **logarithme népérien**. Elle est notée ln. On a :*

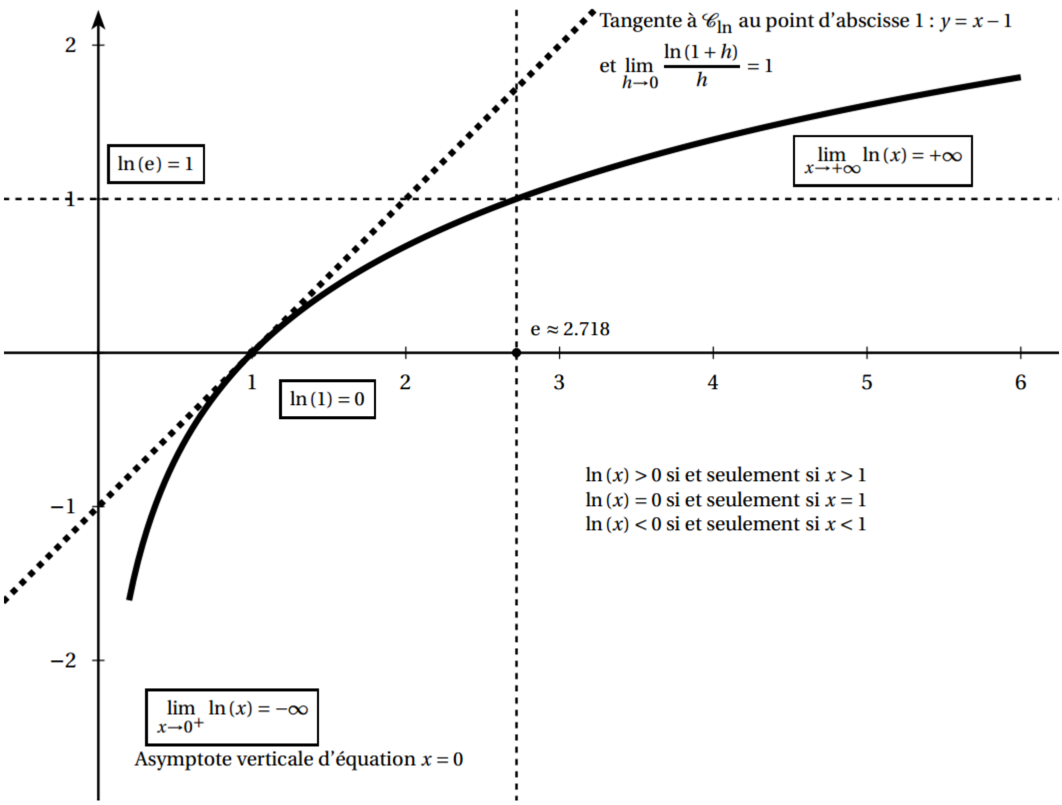
$$e^{ln(x)} = x$$

On en déduit immédiatement les images suivantes :

- $ln(1) = 0$
- $ln(e) = 1$

Proposition 4.2.
- *La fonction ln est l'unique primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.*
- *La fonction ln est strictement croissante.*
- $ln(x) > 0$ *si et seulement si* $x > 1$
- $\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty$

Voici la courbe représentative de la fonction ln :



Proposition 4.3. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, *on a :*

- $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$
- $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)$
- $ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, ln(a^n) = nln(a)$

Preuve : En admettant les trois premières égalités, démontrer la dernière par récurrence.

Application 4.4. *Simplifier les écritures suivantes :*

- $ln(e^{-3}) =$
- $ln(\sqrt{e}) =$
- $ln(\frac{1}{e^3}) =$
- $ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$
- $ln(e^5) - ln(\frac{1}{e^3})$

Application 4.5. *Démontrer que* $ln(2-\sqrt{3}) + ln(2+\sqrt{3}) = 0$.

Application 4.6. *Écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :*

1. $e^{4ln(x)}$ *avec* $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $ln(\frac{1}{e^x})$ *avec* $x \in \mathbb{R}$
3. $e^{\frac{1}{2}ln(x)}$ *avec* $x \in \mathbb{R}_+^*$
4. $ln(\frac{1}{e^{-2x}})$ *avec* $x \in \mathbb{R}$

5 Les fonctions puissances

5.1 Puissance quelconque d'un réel

Définition 5.1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on appelle* ***x puissance α*** *le nombre* $e^{\alpha ln(x)}$ *noté* x^α.

Remarque 5.2.
- *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*
  - *si $\alpha = 0$, on a $x^0 = e^{0ln(x)} = e^0 = 1$*
  - *si $\alpha = 1$, on a $x^1 = e^{1ln(x)} = e^{ln(x)} = x$*
  - *si $\alpha = 2$, on a $x^2 = e^{2ln(x)} = e^{ln(x^2)} = x^2$*
  - *Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $\alpha = n$, on a $x^\alpha = x^n$. C'est-à-dire que la notation correspond avec celle du produit de n facteurs tous égaux à x.*
- *Pour calculer une puissance d'exposant réel, on utilise l'opérateur ** en Python.*

Proposition 5.3. *Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:*

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha,\ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta,\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

5.2 Étude des fonctions puissance

Définition 5.4. *On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$$

Proposition 5.5. *La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :*

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^\alpha - 1$$

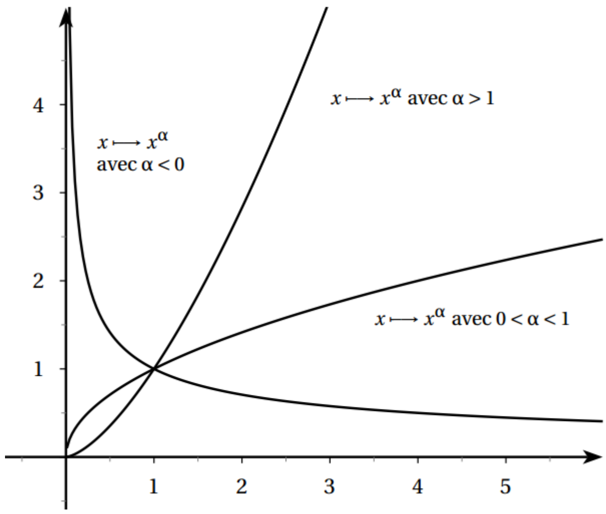
Proposition 5.6.
- *si $\alpha = 0$ alors la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1*
- *si $\alpha < 0$ alors f_α est strictement décroissante et :*

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$$

- *si $\alpha > 0$ alors f_α est strictement croissante et :*

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

Les courbes représentatives sont les suivantes :



5.3 Croissances comparées

Proposition 5.7. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ *alors :*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \mid ln(x) \mid^\beta = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mid x \mid^\alpha \mid e^{\beta x} = 0$

Application 5.8. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{x^3}}$.

1. *Écrire* $f(x)$ *sous la forme* x^α *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. *Étudier la fonction* f.

Application 5.9. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = x^\pi$.
Calculer $\pi f(x) - x f'(x)$ *pour tout* $x > 0$.