

# Programme de khôlle 17

Semaine du 29 janvier 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Question de cours(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Question de cours

1. Loi, espérance et variance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$  avec démonstration.
2. Loi et espérance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique avec démonstration.
3. Loi, espérance et variance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  avec démonstration.

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

1. On suppose dans cette question que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  avec  $p \in ]0; 1[$ .
  - (a) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X > n)$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$  :

$$P_{[X>k]}([X > k + \ell]) = P([X > \ell]).$$

2. Réciproquement, on suppose, dans cette question, que  $X$  vérifie la relation :

$$\forall (k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P_{[X>k]}([X > k + \ell]) = P([X > \ell]).$$

On suppose aussi que  $P(X = 1) \in ]0; 1[$ .

- (a) Démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(X > k + 1) = P(X > k)P(X > 1).$$

(b) En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X > n) = (1 - P(X = 1))^n.$$

(c) Montrer alors que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p = P(X = 1)$ .

**Exercice 2.2.** On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est  $2/3$ , et donc celle d'obtenir face est  $1/3$ .

Les lancers sont supposés indépendants, et on note  $X$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour  $n \geq 1$ , on note  $p_n$  la probabilité  $P(X = n)$ .

1. Expliciter les événements  $(X = 2), (X = 3), (X = 4)$ , et déterminer la valeur de  $p_2, p_3, p_4$ .
2. Montrer que l'on a  $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}, n \geq 4$ .
3. En déduire l'expression de  $p_n$  pour tout  $n$ .
4. Rappeler, pour  $q \in ]-1, 1[$ , l'expression de  $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$ , et calculer alors

$E(X)$ . Interpréter.

**Exercice 2.3.** On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage  $A$  et  $B$  qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

On suppose que  $A$  produit 60% des objets et  $B$  produit 40% des objets.

La probabilité qu'un objet construit par la chaîne  $A$  soit défectueux est  $0,1$  alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne  $B$  soit défectueux est  $0,2$ .

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux.  
Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne  $A$ ".
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par  $A$  est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 20$ . On considère la variable aléatoire  $X$  représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne  $A$  en une heure.
  - (a) Rappeler la loi de  $Y$  ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de  $Y$ .
  - (b) Soient  $k$  et  $n$  deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle  $P(X = k \mid Y = n)$ . (On distinguera les cas  $k \leq n$  et  $k > n$ ).
  - (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements  $([Y = i])_{i \in \mathbb{N}}$ , que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $2$ .

## **Chap.12 : Variables aléatoires réelles discrètes**

### 1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

- 1.1 Définition, propriétés
- 1.2 Loi d'une VAR discrète
- 1.3 Fonction de répartition
- 1.4 Fonction d'une variable aléatoire

### 2 Moments d'une VAR discrète

- 2.1 Espérance
- 2.2 Variance et écart type

### 3 Lois discrètes usuelles

- 3.1 Lois discrètes finies
  - 3.1.1 Loi de Bernoulli
  - 3.1.2 Loi binomiale
  - 3.1.3 Loi uniforme
- 3.2 Lois discrètes infinies
  - 3.2.1 Loi géométrique
  - 3.2.2 Loi de Poisson
- 3.3 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

## **Chap.13 : Séries de Fourier**

### 1 Fonctions T-périodiques

- 1.1 Définition
- 1.2 Régularité
- 1.3 Intégration

### 2 Séries de Fourier

- 2.1 Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues
- 2.2 Coefficients de Fourier
  - 2.2.1 Définition
  - 2.2.2 Cas particuliers
- 2.3 Série de Fourier

### 3 Les théorèmes de convergence

- 3.1 Théorème de Dirichlet
- 3.2 Théorème de Parseval