

Programme de khôlle 7

Semaine du 6 novembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

5. $\sum_{n \geq 2} w_n$ avec :

2. $\sum e^{-2n+4}$

$$w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$

3. $\sum_{n \geq 2} v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$

6. $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$

4. $\sum n(n+1)$

7. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

1. Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente.
2. Encadrer $S(a)$ avec des intégrales pour tout $a > 0$.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \rightarrow +\infty$.

Exercice 2.2. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme et calculer son déterminant :

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \text{ définie par } \varphi(P) = Q,$$

où Q est le polynôme tel que $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$

Exercice 2.3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des séries :

1. $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$,
2. $\sum \frac{n!}{n^{an}}$.

Chap.4 : Déterminants

- 1 Déterminant d'une matrice carrée
- 2 Calcul de déterminant
- 3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

Chap.5 : Séries numériques

- 1 Généralités sur les séries 1.1 Définitions
- 1.2 Séries télescopiques
- 1.3 Propriétés
- 1.4 Convergence absolue

- 2 Séries de référence
- 2.1 Série géométrique
- 2.2 Séries de Riemann

- 3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs
- 3.1 Majoration des sommes partielles
- 3.2 Critère de comparaison
- 3.3 Critère des équivalents
- 3.4 Règle de D'Alembert
- 3.5 Une comparaison série-intégrale
- 3.6 Critère spécial des séries alternées

- 4 Développement décimal d'un nombre réel

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

- 1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
- 1.1 Valeurs propres, vecteurs propres
- 1.2 Sous-espaces propres
- 1.3 Polynôme caractéristique
- 1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

- 2 Les propriétés utiles des éléments propres
- 2.1 Autour des valeurs propres
- 2.2 Autour des vecteurs propres
- 2.3 Autour des sous-espaces propres