

Chap.2 : Applications linéaires

La plupart des notions de ce chapitre sont des notions vues en première année. Aucun des résultats de TSI 1 ne sera démontré dans ce chapitre, libre à vous de retrouver les démonstrations manquantes dans votre cours de première année.

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne le corps des scalaires et il sera égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev (pas nécessairement de dimension finie).

1 Définitions

Définition 1.1. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si :

1. $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

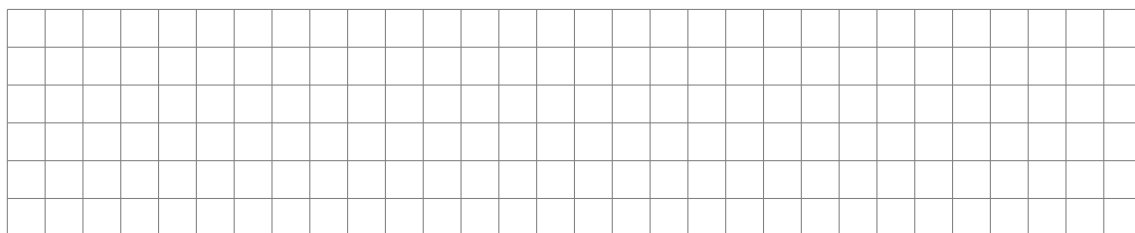
Remarque 1.2. Pas besoin de vérifier en plus que $f(0_E) = 0_F$, c'est automatiquement entraîné par ces deux propriétés.

Proposition 1.3. Caractérisation des applications linéaire).

f est linéaire ssi $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

Application 1.4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(1), P'(1)) \end{cases}$.

Démontrer que f est une application linéaire.



Définition 1.5. • On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire $E \rightarrow E$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

- On appelle **isomorphisme** entre E et F toute application linéaire bijective $E \rightarrow F$.

- On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective $E \rightarrow E$ ("auto=endo+iso").

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Proposition 1.6. Opérations algébriques sur les applications linéaires.

La somme de deux applications linéaires est linéaire, la multiplication d'une application linéaire par un scalaire aussi, et la composée de deux applications linéaires aussi.

Proposition 1.7. Linéarité de la réciproque.

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi linéaire (et bijective!).

2 Noyau et image

Définition 2.1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Le **noyau** de f , noté $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

Proposition 2.2. $\text{Ker}(f)$ est un sev de E et f est injective ssi

$$\text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Définition 2.3. L'**image** de f , notée $\text{Im}(f)$ est l'ensemble des $y \in F$ qui s'écrivent $y = f(x)$ avec $x \in E$ (c'est-à-dire les $y \in F$ ayant au moins un antécédent par f).

$$\text{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}$$

Proposition 2.4. Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Proposition 2.5. $\text{Im}(f)$ est un s-e-v de F et f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$

Définition 2.6. Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle **rang** de f la dimension de son image :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Proposition 2.7. Si E et F sont de dimension finie, si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et si $\dim(E) = \dim(F)$, alors :

f est injective ssi f est surjective.

Remarque 2.8. Ce résultat est très utile pour montrer qu'une application linéaire en dimension finie est bijective : il suffit de vérifier que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, et que l'application est injective (par exemple).

Application 2.9. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(P) = (P(0), P(1), P(2))$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. f est-elle bijective ?



Théorème 2.10. Théorème du rang

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et si E est de dimension finie, alors :

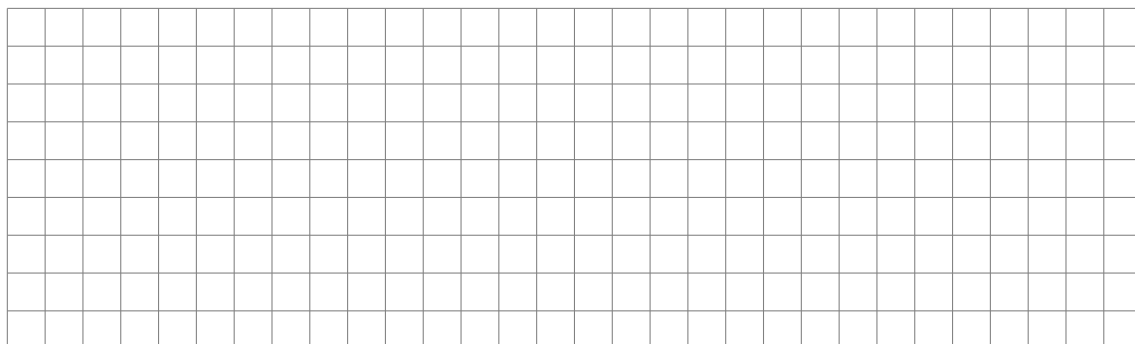
- $\text{Im}(f)$ est automatiquement de dimension finie ;
- $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$.

Application 2.11. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (5x + 12y + 11z - 49t, -3x - 8y - 5z + 27t, -3x - 9y - 3z + 24t, -x - 3y - z + 8t)$$

On admet que f est une application linéaire.

1. Déterminer une base de $\text{ker}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
3. $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?



3 Représentation matricielle

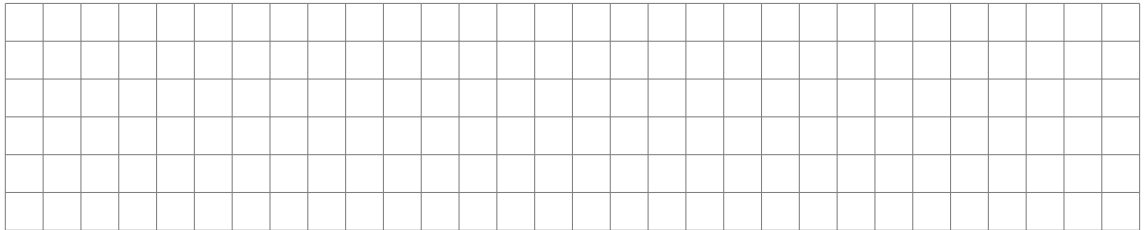
On suppose ici que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimensions finies.

Définition 3.1. On appelle **matrice de f dans les bases** $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ (au départ) et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ (à l'arrivée) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les p colonnes sont les coordonnées respectives de $f(e_1), \dots, f(e_p)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$.

On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$

Application 3.2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto X^2 P'' + P \end{cases}.$

1. Démontrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
4. f est-elle bijective ?



Remarque 3.3. En notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$, on a donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{(u_1, \dots, u_n)}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Proposition 3.4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$[f(x)]_{\mathcal{B}_F} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times [x]_{\mathcal{B}_E}$$

Proposition 3.5. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, et si $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F, G , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

Proposition 3.6. Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi sa matrice A dans n'importe quelles bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est inversible. Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de $f^{-1} : F \rightarrow E$ (dans les bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E$) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))^{-1}$$

Théorème 3.7. Invariance du rang par changement de base.

Le rang d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Proposition 3.8. Sur la matrice d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E , $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Alors :

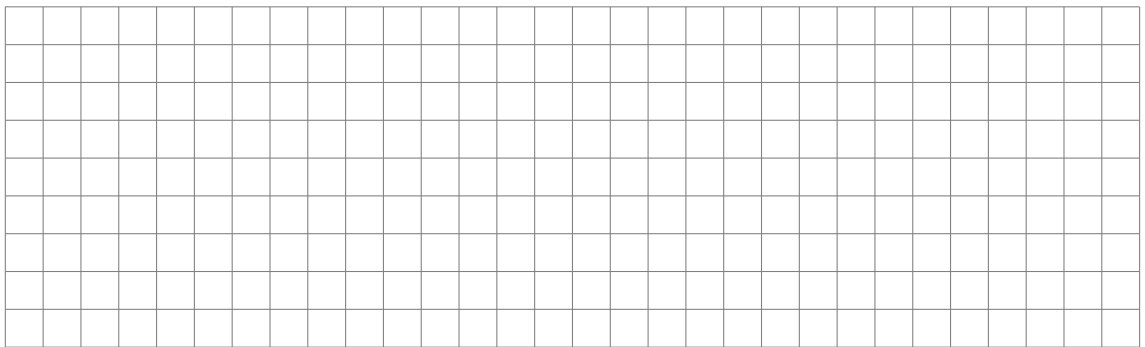
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}'_E}(f) = (P_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \times P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$$

Application 3.9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x + y, z + 2x, z)$$

On admet que f est une application linéaire.

1. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. f est-elle un automorphisme ? Si c'est la cas, donner l'expression de $f^{-1}(x, y, z)$.
3. On admettra que $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 2))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Donner la matrice de f relativement à la base \mathcal{B} .

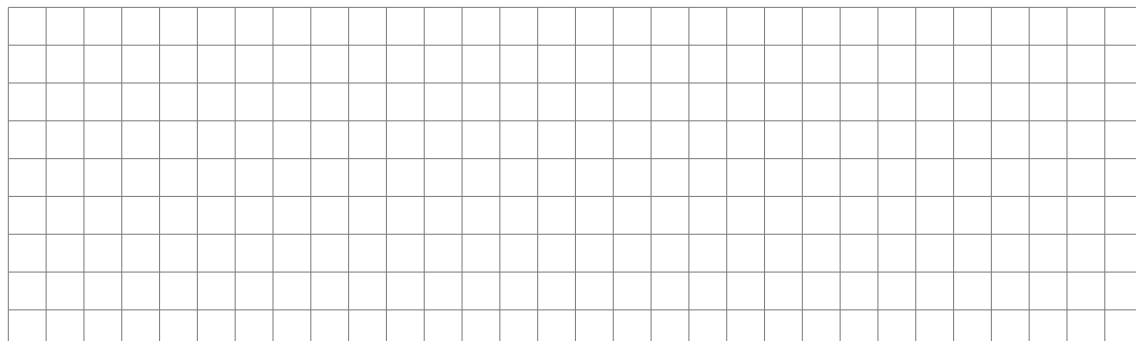


Application 3.10. Soit $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

$$\text{Par convention } \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k > n.$$

1. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant M pour matrice dans la base canonique.
2. En déduire que $M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et déterminer M^{-1} .



4 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 4.1. Soit f un endomorphisme de E , F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F est **stable** par f lorsque :

$$\forall u \in F, f(u) \in F$$

Définition 4.2. Soient des matrices carrées $A_1 \in \mathbb{M}_{p_1}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathbb{M}_{p_2}(\mathbb{K})$, \dots , $A_k \in \mathbb{M}_{p_k}(\mathbb{K})$, et les O sont des matrices (en général rectangulaires) nulles, avec :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = n.$$

Alors la matrice $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ est dite **diagonale par blocs**.

Théorème 4.3. Soit φ un endomorphisme de E , F_1, F_2, \dots, F_k des sous-espaces vectoriels de E , stables par φ .

Si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$, alors, dans une base adaptée à cette somme

directe, la matrice de φ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

Remarque 4.4. Les A_i sont les matrices des restrictions de φ aux F_i , dans leurs bases respectives.

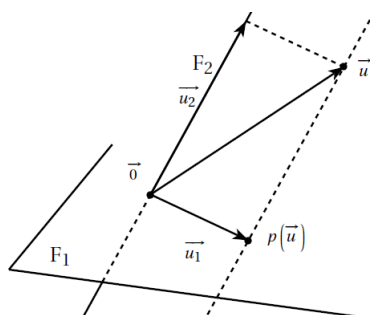
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

5.1 Projecteurs

Définition 5.1. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.

On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application :

$$f : \begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \rightarrow E \\ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mapsto \vec{u}_1 \end{cases}$$



Proposition 5.2. Soit un projecteur p . Alors :

- p est un endomorphisme de E ;
- $p \circ p = p$;
- $\text{Ker}(p) = F_2$ et $\text{Im}(p) = F_1$

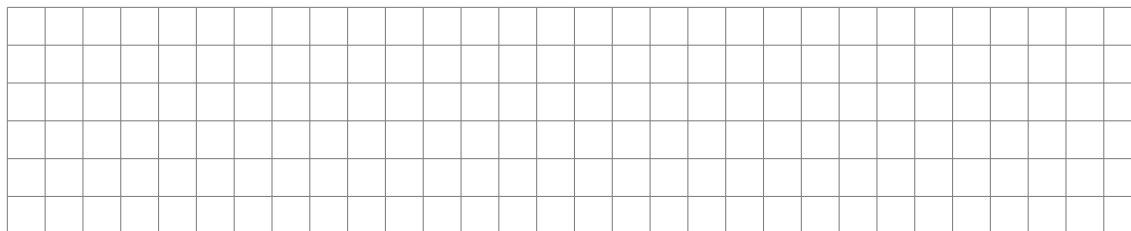
Théorème 5.3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ alors :

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p$$

Dans ce cas, p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$ et on a alors $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Application 5.4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{cases}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
2. Démontrer que f est un projecteur.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f .

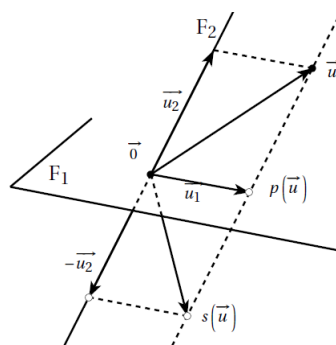


5.2 Symétries

Définition 5.5. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.

On appelle **symétrie vectorielle** par rapport à F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application s définie par :

$$s : \begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \rightarrow E \\ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mapsto \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{cases}$$



Proposition 5.6. Soit s une symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 . Alors :

- $s \in \mathcal{L}(E)$
- $s \circ s = id_E$
- $F_1 = Ker(s - id_E) = \{ \vec{u} \in E, s(\vec{u}) = \vec{u} \}$ et
 $F_2 = Ker(s + id_E) = \{ \vec{u} \in E, s(\vec{u}) = -\vec{u} \}$
- $s \in GL(E)$ donc $Ker(s) = \{ \vec{0}_E \}$ et $Im(s) = E$

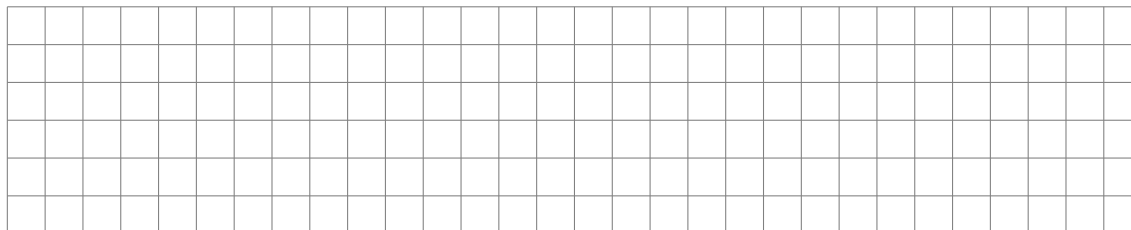
Proposition 5.7. On note :

- p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2
- q le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1
- s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 .

Alors :

- $s = p - q$
- $q = id_E - p$
- $s = 2p - id_E$

Preuve :



Proposition 5.8. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

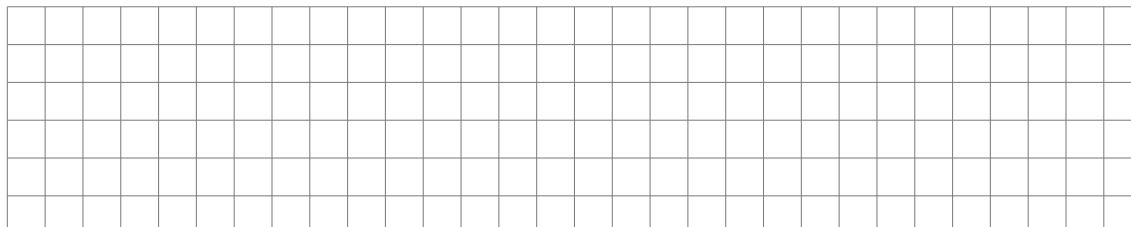
$$s \text{ est une symétrie vectorielle} \Leftrightarrow s \circ s = id_E$$

Plus généralement, une application vérifiant la relation $f \circ f = id$ est dite *involutive*.

Application 5.9. On admet que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ avec :

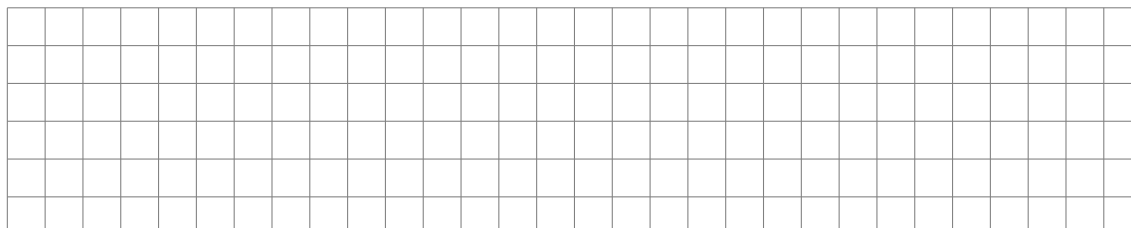
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = Vect(\{(1, 1, 1, 1)\})$$

Expliciter la symétrie par rapport à G parallèlement à F .



Application 5.10. Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(-X) \end{cases}$.

Démontrer que ϕ est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.



Remarque 5.11. *Supposons que $E = F \oplus G$.*

Lorsqu'on réalise une projection sur F parallèlement à G , alors F est stable par cette projection.

On a la même chose pour la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Les matrices respectives selon des bases adaptées à la décomposition en somme directe seront donc diagonales par blocs.