Devoir Surveillé 5 - CORRECTION

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. ***Courbe invariante par rotation.***

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Γ la courbe définie par la fonction vectorielle :

$$\vec{f} : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}.$$

On notera $M(t)$ le point du plan défini par $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$.

1. *Soit Γ_1 la partie de la courbe Γ correspondant à $t \in [0; \pi]$. Montrer que l'on peut obtenir toute la courbe Γ à partir de Γ_1. On précisera les transformations géométriques utilisées.*
   Les fonctions x et y sont 2π périodiques, il suffit donc d'un intervalle d'amplitude 2π pour tracer toute la courbe. On prend l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   Ensuite, on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ pour tout réel t, ainsi le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.
   C'est pourquoi il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$.
   On obtient ainsi la demi-trajectoire Γ_1, que l'on complète par symétrie d'axe (Ox) pour obtenir la courbe Γ.
2. (a) *Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{cases} x'(t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y'(t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

D'une part, on a pour tout réel t :

$$x'(t) = 2(\sin(t) + \sin(2t)), \quad y'(t) = 2(\cos(t) - \cos(2t))$$

D'autre part, en linéarisant les expressions données :

$$\begin{aligned} 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{1}{i}\left(e^{3it/2} - e^{-3it/2}\right)\left(e^{it/2} + e^{-it/2}\right) \\ &= \frac{1}{i}\left(e^{2it} + e^{it} - e^{-it} - e^{-2it}\right) = 2\sin(t) + 2\sin(2t) = x'(t) \end{aligned},$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) &= -\left(e^{3it/2} - e^{-3it/2}\right)\left(e^{it/2} - e^{-it/2}\right) \\ &= -\left(e^{2it} - e^{it} - e^{-it} + e^{-2it}\right) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = y'(t) \end{aligned},$$

ce qui montre les égalités voulues.

(b) *Montrer que la courbe Γ_1 présente deux points singuliers : $t = 0$ et $t = t_0$ à déterminer.*

Les points singuliers de Γ_1 sont les points $t \in [0;\pi]$ tels que $\vec{f}'(t) = \vec{0}$.
D'après la question précédente, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}'(t) = 4\sin(3t/2)\begin{pmatrix}\cos(t/2)\\ \sin(t/2)\end{pmatrix},$$

or $\cos(t/2)$ *et* $\sin(t/2)$ *ne s'annulent jamais en même temps* (*car* $\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2) = 1$), *donc :*

$$\vec{f}'(t) = \vec{0} \iff \sin\left(\frac{3t}{2}\right) = 0 \iff \frac{3t}{2} \equiv 0[\pi] \iff t \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

Sur l'intervalle $[0;\pi]$, cela équivaut ì $t \in \left\{0; \frac{2\pi}{3}\right\}$.
Ceci montre que Γ_1 possède exactement deux points singuliers : $t = 0$ et $t = t_0 = \frac{2\pi}{3}$.

(c) *Construire un tableau comprenant les signes des dérivées x', y' sur $[0;\pi]$, les variations des fonctions x et y sur $[0;\pi]$, et les valeurs aux points remarquables.*

t	0		$2\pi/3$		π
Signe de x'	0	$+$	0	$-$	0
Variations de x	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	4
Variations de y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
Signe de y'	0	$+$	0	$-$	

3. *Déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathscr{T}_0$ à Γ_1 au point $t = 0$, et montrer que ce point est un point de rebroussement de première espèce.*

Par un développement limité en 0 à l'ordre 3 de chacune des applications coordonnées, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3t^2 + o\left(t^3\right) \\ y(t) = t^3 + o\left(t^3\right) \end{array}\right. ,$$

c'est-à-dire :

$$\vec{f}(t) = t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{o}\left(t^3\right)$$

Par identification avec la formule de Taylor-Young, on obtient que $\vec{f}''(0) = (6;0)$ est le premier vecteur dérivé non nul, il dirige donc la tangente $\mathscr{T}_0$ (qui est par conséquent horizontale).
Ensuite, $\vec{f}'''(0)$ est le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\vec{f}''(0)$, donc les entiers caractéristiques du point $t = 0$ sont $(p;q) = (2;3)$, ce qui montre que ce point est un point de rebroussement de première espèce (puisque p est pair et q est impair).

4. *Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}_1$ à Γ_1 au point $t = t_0$, et montrer que ce point est également un point de rebroussement de première espèce.*

4. Pour trouver un vecteur directeur de la tangente au point $M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, on détermine le premier vecteur dérivé non nul de $\vec{f}$ en $t = 2\pi/3$. On sait déjà que $\vec{f}'(2\pi/3) = \overrightarrow{0}$. En redérivant, on obtient :

$$\vec{f}''(2\pi/3) = \begin{pmatrix} x''\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur étant non nul, il dirige la tangente $\mathscr{T}_1$.
Une équation de $\mathscr{T}_1$ s'obtient en écrivant :

$$M \in \mathscr{T}_1 \Longleftrightarrow \det\left(\overrightarrow{M\left(t_0\right)\, M}, \vec{f}''\left(t_0\right)\right) = 0$$

C'est ainsi qu'on obtient l'équation :

$$\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0.$$

Ensuite, on calcule $\vec{f}^{(3)}(2\pi/3)$:

$$\vec{f}^{(3)}(2\pi/3) = \begin{pmatrix} x^{(3)}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ y^{(3)}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\vec{f}''(2\pi/3)$, les entiers caractéristiques du point de paramètre $2\pi/3$ sont donc $(p, q) = (2, 3)$.
Il s'agit donc bien d'un point de ***rebroussement de première espèce****.*

5. *Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3; 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.*

   (a) *Vérifier que la droite $\mathscr{T}_1$ passe par le point Ω.*
   Il suffit de voir si les coordonnées de Ω vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{T}_1$:

   $$\sqrt{3} \times 3 - 0 - 3\sqrt{3} = 0$$

   donc Ω appartient ì $\mathscr{T}_1$.

   (b) *Déterminer l'intersection $\Gamma \cap \mathscr{C}_1$.*
   Le cercle $\mathscr{C}_1$ a pour équation cartésienne :

   $$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

   donc un point $M(t) = (x(t); y(t))$ de la courbe Γ est sur $\mathscr{C}_1$ ssi :

   $$\begin{aligned}(x(t)-3)^2 + y(t)^2 = 9 &\iff (-2\cos(t) - \cos(2t))^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2 = 9\\ &\iff 4\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) + \left(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)\right)\\ &\iff 4(\cos(t)\cos(2t) - \sin(t)\sin(2t)) = 9\\ &\iff \sin(3t)\cos(2t+t) = 9\\ &\cos(3t) = 1 \iff t \equiv 0[2\pi/3]\end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ (suffisant pour décrire toute la trajectoire), on trouve donc trois solutions : $t \in \{-2\pi/3; 0; 2\pi/3\}$.
   Donc la courbe Γ et le cercle $\mathscr{C}_1$ ont exactement 3 points d'intersection :

   $$M(0) = (0; 0); \quad M(2\pi/3) = (9/2; 3\sqrt{3}/2), \quad M(-2\pi/3) = (9/2; -3\sqrt{3}/2)$$

   (les deux derniers sont symétriques par rapport à l'axe (Ox)).
   Ces trois points sont les points de rebroussement de la courbe Γ.

   (c) *Montrer que la courbe Γ et le cercle $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente au point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$.*
   Déjà, le point $M(\pi/3) = (5/2; \sqrt{3}/2)$ est sur le cercle $\mathscr{C}_2$ puisque :

   $$\overrightarrow{\Omega M(\pi/3)} = \left(\frac{5}{2} - 3, \frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

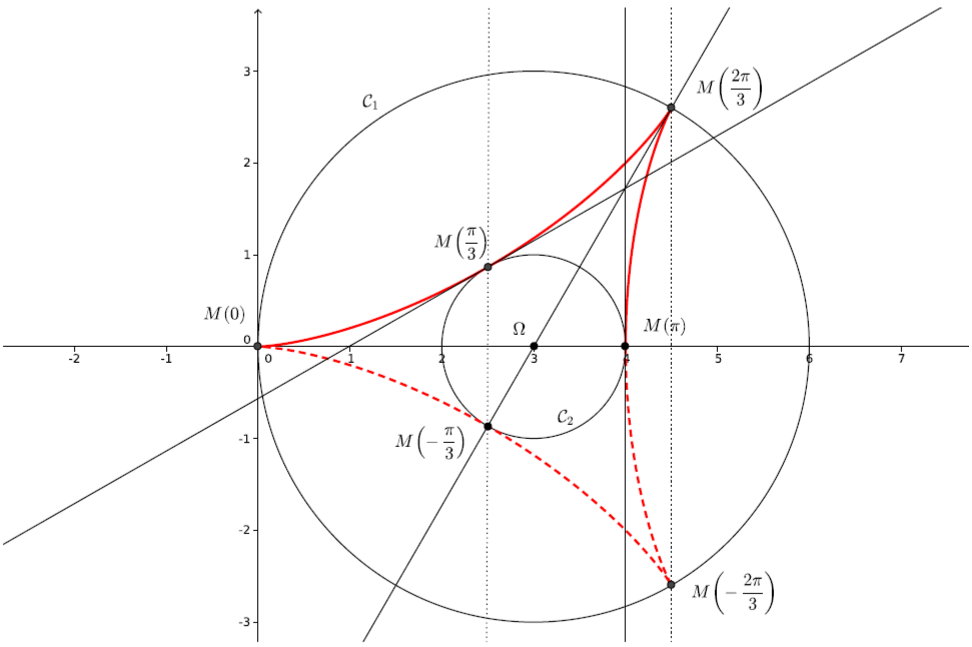
   donc :

   $$\|\overrightarrow{\Omega M(\pi/3)}\| = 1 = R_2.$$

Ensuite, la tangente à Γ au point de paramètre $\pi/3$ est dirigée par $\vec{f}'(\pi/3) = \left(x'\left(\frac{\pi}{3}\right), y'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = (2\sqrt{3}, 2)$ (car ce vecteur est non nul).
Pour montrer que cette droite est également tangente au cercle $\mathscr{C}_2$ en $M(\pi/3)$, il suffit de montrer qu'elle est perpendiculaire au rayon $(\Omega M(\pi/3))$.
C'est le cas car :

$$\overrightarrow{\Omega M(\pi/3)} \cdot \vec{f}'(\pi/3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (2\sqrt{3}, 2) = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 0.$$

6. *Dans le repère $\mathscr{R}$, tracer les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, puis les tangentes à Γ aux points de paramètres $t = 0, t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ et $t = \pi$. Tracer ensuite la courbe Γ_1 en trait plein, et la compléter en pointillés jusqu'à obtenir Γ. On fera apparaitre tous les points remarquables.*



7. *Montrer que pour tout réel t, le point $M\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$ est l'image du point $M(t)$ par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.*
La courbe Γ est donc invariante par rotation.

Passons par la représentation complexe de la rotation r : l'image de tout point d'affixe z est le point d'affixe :

$$r(z) = z_\Omega + e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_\Omega).$$

On a $z_\Omega = 3$ *et tout point de la courbe* Γ *a une affixe du type :*

$$z(t) = (3 - 2\cos(t) - \cos(2t)) + i(2\sin(t) - \sin(2t)).$$

Alors, son image par r *est :*

$$\begin{aligned} r(z(t)) &= 3 + e^{i\frac{2\pi}{3}}((-2\cos(t) - \cos(2t)) + i(2\sin(t) - \sin(2t))) \\ &= 3 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{-it} + e^{2it}\right) = z\left(t - \tfrac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Ceci montre que $M\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = r(M(t))$.

8. *Calculer la longueur de la courbe* Γ.
   Par symétrie d'axe (Ox), *la longueur de la courbe* Γ *est :*

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt = 2\int_0^{\pi} \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt = 2\int_0^{\pi} 4|\sin(3t/2)|dt \\ &= 8\left(\int_0^{2\pi/3} \sin(3t/2)dt + \int_{2\pi/3}^{\pi} (-\sin(3t/2))dt\right) = 16. \end{aligned}$$

Exercice 0.2. ***La fonction Dilogarithme***
On considère la fonction f *définie sur* $]-\infty, 1[$ *par :*

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & si\ t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & si\ t = 0 \end{cases}.$$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $]-\infty, 1[$.
   On fait un développement limité : $\ln(1-t) = -t + o(t)$, *donc* $f(t) = 1 + o(1)$, *ce qui montre que* $\lim_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$, *et donc que* f *est continue en* 0 .
   Par ailleurs, f *est évidemment continue sur* $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; 1[$ (*et même de classe* $\mathscr{C}^\infty$), *donc au total,* f *est continue sur* $]-\infty; 1[$.

   La question précédente montre que f *possède des primitives sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$.
   On appelle ***fonction Dilogarithme*** *la primitive de* f *nulle en 0 , c'est-à-dire la fonction :*

$$L :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, \quad L(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2. *Rappeler (sans démonstration) le développement en série entière de* $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, *ainsi que son domaine réel de validité.*
   Pour tout $t \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

3. *En déduire le développement en série entière de $t \mapsto -\ln(1-t)$, ainsi que son domaine réel de validité. On précisera soigneusement le théorème utilisé.*

   Vu que $t \mapsto -\ln(1-t)$ est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-1;1[$ nulle en 0, on en déduit par intégration terme à terme que :

   $$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

   pour tout $t \in]-1;1[$.

4. *Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle ouvert à préciser, et donner son développement.*

   Pour tout $t \in]-1;1[\setminus\{0\}$, on a :

   $$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

   De plus, cette égalité reste vraie en $t = 0$, car $f(0) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n+1}$.

   La fonction f est donc manifestement développable en série entière sur $]-1;1[$, et :

   $$\forall t \in]-1;1[\,, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$$

5. *En déduire que $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ pour tout $x \in]-1;1[$.*

   Vu que L est la primitive de f nulle en 0, on obtient par intégration terme à terme du DSE précédent :

   $$\forall x \in]-1;1[\,, \quad L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

6. *Montrer que L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.*
   En tant que fonction développable en série entière, L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1;1[$.
   De plus, sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1\,[$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc sa primitive L aussi.
   En définitive, L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty;1[$.

Exercice 0.3. *On dit qu'une matrice N carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k no nul tel que*

$$N^{k-1} \neq 0_n \text{ et } N^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n. Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une ***décomposition de Dunford*** *de A lorsque :*

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. *On pose :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

- *Δ est bien diagonalisable car elle est déjà diagonale.*
- *$N^2 = 0_2$ donc N est une matrice nilpotente.*
- *$\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta N = N\Delta$.*

  Et $\Delta + N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

(Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) *Déterminer les valeurs propres de A.*
Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)((\lambda - 3)\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 2.

(b) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
Cherchons la dimension des deux sous-espaces propres de A :
2 est une valeur propre de multiplicité 1 donc $E_2(A)$ est de dimension 1 .

Pour la valeur propre 1 :

$$AX = 1X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *et donc* E_1 *est de dimension 1 car* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* E_1 *(génératrice + libre car un seul vecteur non nul).*
La somme des dimensions des sous-espaces propres de A *vaut donc* 2 *et non* 3 *donc* A *n'est pas diagonalisable.*

3. *On considère les matrices colonnes :*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Calculer les produits* $\Delta X_1, \Delta X_2$ *et* ΔX_3.
$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1, \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_2$ *et :*
$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_3$

(b) *Justifier que la matrice* Δ *est diagonalisable et déterminer une matrice* P *inversible telle que :* $\Delta = PDP^{-1}$.
Les vecteurs (X_1, X_2, X_3) *sont des vecteurs propres de* Δ. *Montrons qu'ils forment une base de vecteurs propres.*
On note $\mathscr{B}_c$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. *On a alors :*

$$\det_{\mathscr{B}_c}(X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ainsi (X_1, X_2, X_3) *est une base de vecteurs propres de* Δ *associés aux valeurs propres 2,1 et 1 . Donc* Δ *est diagonalisable.*
Il suffit alors de prendre P *la matrice de passage de la base canonique de* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *à la base de vecteurs propres pour avoir* $\Delta = PDP^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) *Calculer P^{-1}.*

En utilisant le pivot de Gauss, on obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) *Établir que N est une matrice nilpotente.*

On a, après calculs, $N^2 = 0_3$ donc N est une matrice nilpotente.

(b) *Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.*

On a déjà vu que Δ est diagonalisable et N nilpotente.
De plus on a bien $\Delta + N = A$.
Enfin on a $\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

(c) *En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.*

Comme Δ et N commutent on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^k N^{n-k} = \Delta^n \times N^0 + n\Delta^{n-1} \times N$$

car $N^2 = 0_3$ *donc pour tout $k \geqslant 2$:*

$$N^k = 0_3 \text{ et } A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N.$$

(d) *Établir que : pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $\quad \Delta^k N = N$.*

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: $\Delta^k N = N$ est vraie pour tout entier k non nul.

- *On a déjà vu dans la question 4 . b) que $\Delta N = N$ donc $\mathscr{P}(1)$ est bien vraie.*
- *Soit k un entier non nul fixé. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.*
  Alors on a $\Delta^{k+1}N = \Delta\Delta^k N = \Delta N = N$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est alors vraie.
- *Grâce au principe de récurrence on a montré que $\forall k \geqslant 1, \Delta^k N = N$.*

(e) *Proposer une décomposition de Dunford de A^n.*