Concours Blanc - Mathématiques
Lycées A.Artaud-J.Ferry-G.Tillion-E.d'Alzon

Corrigé

Exercice 1

Partie I-Questions préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On confondra de façon usuelle un polynôme avec sa fonction polynomiale associée.
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
Enfin, on définit l'application f sur E par :

$$f : P \mapsto \left(X - X^2\right) P'' + (1 - 2X)P'.$$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Commençons par montrer que E est stable par f. Si $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, donc $(1-2X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(X - X^2)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg(1-2X) = 1$ et $\deg(X - X^2) = 2$, par suite $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par addition, ce qu'il fallait montrer.
Montrons ensuite que f est linéaire : $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda P + Q) = (X - X^2)(\lambda P'' + Q'') + (1 - 2X)(\lambda P' + Q')$$

(par linéarité de la dérivation)

$$\begin{aligned}
&= \lambda(X - X^2)P'' + (X - X^2)Q'' + \lambda(1 - 2X)P' + (1 - 2X)Q' \\
&= \lambda\left((X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'\right) + (X - X^2)Q'' + (1 - 2X)Q' \\
&= \lambda f(P) + f(Q),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer, ainsi f est effectivement un endomorphisme de E.

Q2. Calculer $f(1), f(X)$ et $f\left(X^k\right)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$. Déterminer ensuite la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

$f(1) = 0$.
$f(X) = 1 - 2X$.
$\forall k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
f(X^k) &= (X - X^2)k(k-1)X^{k-2} + (1 - 2X)kX^{k-1} \\
&= k(k-1)X^{k-1} - k(k-1)X^k + kX^{k-1} - 2kX^k \\
&= k^2X^{k-1} - k(k+1)X^k.
\end{aligned}$$

Par conséquent $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 9 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n(n+1) \end{pmatrix}$

Q3. On considère l'application :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P,Q) \longmapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

a) Rappeler la définition d'un produit scalaire sur E.

b) Montrer que φ est effectivement un produit scalaire sur E.

$\forall (P,Q,R) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ car $PQ = QP$, ainsi φ est symétrique ;
$\varphi(\lambda P + Q, R) = \int_0^1 (\lambda P + Q)R = \int_0^1 (\lambda PR + QR) = \lambda \int_0^1 PR + \int_0^1 QR$
$= \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$, ainsi φ est bilinéaire (car symétrique) ;
$\varphi(P,P) = \int_0^1 P^2 \geqslant 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive sur un segment ;
de plus, $\varphi(P,P) = 0 \implies \int_0^1 P^2(x)dx = 0 \implies \forall x \in [0,1], P^2(x) = 0$ car P^2 est une fonction positive continue sur $[0;1] \implies P$ est un polynôme admettant une infinité de racines (tous les réels de 0 à 1) $\implies P$ est le polynôme nul car un polynôme non nul ne peut posséder qu'un nombre fini de racines (majoré par son degré).
Donc φ est un produit scalaire sur E.

Par la suite, on pourra noter $\langle P,Q \rangle$ au lieu de $\varphi(P,Q)$. La norme associée à φ sera notée $||.||$.

Partie II - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie, on prend $n = 2$. On a donc $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
E est muni du produit scalaire φ défini en **Q3b**.

Q4. Soit A_2 la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E. Montrer que :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

C'est un cas particulier de la réponse à **Q2**, en ne considérant que les trois premières lignes et les trois premières colonnes de la matrice qu'on y a obtenue.

Q5. L'endomorphisme f est-il bijectif ? Justifier.

$A_2 = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, donc $\det(f) = \det(A_2) = 0$ (car l'une des colonnes de A_2 n'est constituée que de 0), ainsi f n'est pas bijectif.

Q6. Préciser les valeurs propres de f.
Peut-on, à ce stade, conclure à la diagonalisabilité de f ?

A_2 est triangulaire donc les valeurs propres de f sont ses coefficients diagonaux : $Sp(f) = \{0; -2; -6\}$.
Ainsi f possède autant de valeurs propres distinctes que la dimension de E, donc on peut conclure dès à présent que f est diagonalisable.

Q7. Déterminer des bases des sous-espaces propres de f (le terme de degré 0 de chaque vecteur des bases sera pris égal à 1).

Pour tout $\lambda \in SP(f) = \{0; -2; -6\}$, notons $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E)$.

$\ker(A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), y = 0, z = 0 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

donc $\boxed{E_0(f) = Vect(1).}$

$\ker(A_2 - (-2)I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), y = -2x, z = 0 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

donc $\boxed{E_{-2}(f) = Vect(1 - 2X).}$

$\ker(A_2 - (-6)I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), y = -6x, z = -y \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

donc $\boxed{E_{-6}(f) = Vect(1 - 6X + 6X^2).}$

Q8. **a)** Déterminer une matrice P, inversible, telle que :

$$A_2 = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } \alpha > \beta > \gamma.$$

Préciser α, β, γ.

On sait par **Q6** que f est diagonalisable de spectre $\{0; -2; -6\}$, donc par **Q7** que la famille $\mathcal{B}' = (1, 1 - 2X, 1 - 6X + 6X^2)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f, si bien qu'en introduisant la matrice de passage (donc inversible) $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, alors par la formule de changement de base,

$$A_2 = Mat_{\mathcal{B}}(f) = P Mat_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a donc $\alpha = 0, \beta = -2$ et $\gamma = -6$.

---

b) Calculer P^{-1}.

Par l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Q9. On considère maintenant les polynômes :

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - 2X, \quad L_2 = 1 - 6X + 6X^2.$$

a) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2)$ est une base orthogonale de E. On rappelle que E est muni du produit scalaire φ étudié dans la partie I.

Montrons tout d'abord que la famille $\mathcal{L}$ est une famille orthogonale.

$$\varphi(L_0, L_1) = \int_0^1 1(1-t)dt = [t - t^2]_0^1 = 0$$

$$\varphi(L_0, L_2) = \int_0^1 1(1-6t+6t^2)dt = [t - 3t^2 + 2t^3]_0^1 = 0$$

$$\varphi(L_1, L_2) = \int_0^1 (1-t)(1-6t+6t^2)dt = \int_0^1 1-8t+18t^2-12t^3 dt = [t-4t^2+6t^3-3t^4]_0^1 = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{L}$ est une famille orthogonale. Par ailleurs, cette famille est une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls donc elle est libre. De plus, elle est de cardinal 3 qui est égal à la dimension de E. Ainsi, par théorème de caractérisation des bases, la famille $\mathcal{L}$ est une base orthogonale de E.

b) Calculer $\|L_0\|$ et $\|L_1\|$.

$$\|L_0\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} = \sqrt{[t]_0^1} = 1$$

$$\|L_1\| = \sqrt{\int_0^1 (1-2t)^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 1 - 4t + 4t^2 dt} = \sqrt{\left[t - 2t^2 + \frac{4}{3}t^3\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\|L_0\| = 1}$$

$$\boxed{\|L_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

c) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

$L_0 = 1 \in \mathbb{R}_1[X]$ $L_1 = 1 - 2X \in \mathbb{R}_1[X]$

La famille (L_0, L_1) est donc une famille de $\mathbb{R}_1[X]$.

De plus, $\varphi(L_0, L_1) = 0$ donc la famille (L_0, L_1) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$.

De plus, en tant que sous-famille de la famille $\mathcal{L}$ qui est libre, la famille (L_0, L_1) est une famille libre de $\mathbb{R}_1[X]$.

De plus, c'est une famille à deux éléments et $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2.

Donc, la famille (L_0, L_1) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$.

Il suffit donc de normer ces vecteurs pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

Ainsi, la famille $\left(\frac{1}{\|L_0\|}L_0, \frac{1}{\|L_1\|}L_1\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

La famille $(1, \sqrt{3}(1-2X))$ est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

d) Rappeler la définition de Π_1, projection orthogonale de E sur $\mathbb{R}_1[X]$.
Soit $P_2 = X^2$. Exprimer $\Pi_1(P_2)$ en fonction de L_0, L_1 et de L_2.
On demande ici de faire explicitement les calculs.

On note $F = \mathbb{R}_1[X]$. On a alors par théorème : $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

Par définition d'une somme directe, pour tout $P \in E$, il existe un unique couple $(Q, R) \in F \times F^{\perp}$ tel que $P = Q + R$. L'image de P par Π_1 est :
$\Pi_1(P) = Q$.
Ceci définit bien Π_1.
La famille $(1, \sqrt{3}(1-2X))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$. Donc, d'après l'expression de la projection orthogonale dans une base orthonormée :

$$\begin{aligned}\Pi_1(P_2) &= \varphi(P_2, 1).1 + \varphi(P_2, \sqrt{3}(1-2X)).\sqrt{3}(1-2X) \\ &= \varphi(P_2, 1).1 + 3\varphi(P_2, 1-2X).(1-2X)\end{aligned}$$

Or :

$$\varphi(P_2, 1) = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\varphi(P_2, 1-2X) = \int_0^1 t^2(1-2t)dt = \int_0^1 t^2 - 2t^3 dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned}\Pi_1(P_2) &= \frac{1}{3}.1 - 3 \times \frac{1}{6}.(1-2X) \\ &= \frac{1}{3}.1 - \frac{1}{2}(1-2X) \\ &= -\frac{1}{6} + X\end{aligned}$$

$$\boxed{\Pi_1(P_2) = X - \frac{1}{6}}$$

---

e) Montrer que la distance de P_2 au plan vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ vérifie :

$$d\left(P_2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

$d\left(P_2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|P_2 - \Pi_1(P_2)\|$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|P_2 - \Pi_1(P_2)\|^2 = \|P_2\|^2 - \|\Pi_1(P_2)\|^2$$

Or,
$\|P_2\|^2 = \int_0^1 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$
et :

$$\begin{aligned}\|\Pi_1(P_2)\|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \int_0^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{6} + \frac{t}{36}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{7}{36}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\|P_2 - \Pi_1(P_2)\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{36}{180} - \frac{35}{180} = \frac{1}{180}.$$

$$d\left(P_2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|P_2 - \Pi_1(P_2)\| = \sqrt{\frac{1}{180}} = \sqrt{\frac{1}{36 \times 5}}$$

On a donc bien :

$$\boxed{d\left(P_2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \frac{1}{6\sqrt{5}}}$$

Exercice 2

Soit ω un paramètre réel positif. On considère l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) + y'(x) + \omega^2 xy(x) = 0, \qquad (H_\omega)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. ***Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.***

Partie A - Étude du cas $\omega = 0$

Q1. Montrer que si y est une solution de (H_0) sur $]0, +\infty[$., alors $z = y'$ est solution de l'équation différentielle

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = 0 \qquad \text{(E)}$$

sur $]0, +\infty[$.

(H_0) est l'équation différentielle $xy''(x) + y'(x) = 0$.

Posons $z = y'$. On a alors $z' = y''$.

Supposons que y est une solution de (H_0) sur $]0, +\infty[$.

On a alors pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$xy''(x) + y'(x) = 0$$

Puis, en divisant par x, qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$:

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} = 0$$

Puis :

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = 0$$

Ainsi, $z = y'$ est bien solution de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Q2. **a)** Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

L'équation (E) est une équation homogène linéaire d'ordre 1.

On pose pour tout $x \in]0; +\infty[$: $a(x) = \frac{1}{x}$.

Une primitive de a sur $]0; +\infty[$ est la fonction : $A : x \mapsto \ln x$.

Les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont donc les fonctions :

$$\begin{aligned} z:]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda e^{-\ln x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\begin{aligned} z:]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

b) En déduire les solutions de (H_0) sur $]0,+\infty[$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse :

Soit y une solution de (H_0) sur $]0,+\infty[$.

Alors, d'après la première question, y' est solution de l'équation (E) sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$y'(x) = \frac{\lambda}{x}$$

En prenant une primitive, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$y(x) = \lambda \ln x + \mu$$

Synthèse :

Réciproquement, montrons que les fonctions définies précédemment sont bien solutions de (H_0). Soit donc la fonction

$$\begin{aligned} y:]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \ln x + \mu, \end{aligned}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Par somme de fonctions de classe C^2, y est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $y'(x) = \frac{\lambda}{x}$ et $y''(x) = -\frac{\lambda}{x^2}$.

En remplaçant dans le membre de gauche de (H_0), on obtient :

$$xy''(x) + y'(x) = x \times \left(-\frac{\lambda}{x^2}\right) + \frac{\lambda}{x} = 0.$$

Ainsi, y est bien solution de (H_0).

Conclusion :

Les solutions de (H_0) sont les fonctions :

$$\boxed{\begin{aligned} y:]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \ln x + \mu, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}}$$

Partie B - Étude du cas $\omega > 0$

Dans toute cette partie, on suppose $\omega > 0$.

Q3. Montrer qu'une solution y de (H_ω) définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $y'(0) = 0$.

Si y est une solution de (H_ω) définie sur $\mathbb{R}$, alors y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$xy''(x) + y'(x) + \omega^2 xy(x) = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En particulier, pour $x = 0$, on obtient $0 \times y''(0) + y'(0) + \omega^2 \times 0 \times y(0) = 0$, soit $y'(0) = 0$.

On cherche à présent les fonctions sommes de séries entières $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solutions de (H_ω) sur l'intervalle $]-R, R[$, où $R > 0$ désigne le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Q4. Que vaut a_1 ?

y, en tant que fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ est, par propriété, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, en particulier en 0.

Par unicité du développement en série entière, à l'aide du développement en série de Taylor de la fonction y, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

Ainsi, $a_1 = \dfrac{y'(0)}{1!} = 0$.

Q5. **a)** Montrer que la suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+2)^2}.$$

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence, on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$xy''(x) + y'(x) + \omega^2 xy(x) = x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \omega^2 x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Du fait que $a_1 = 0$ et y est solution de (H_ω), on en déduit

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(n(n-1)+n)a_n x^{n-1} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Par glissement d'indice, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)^2 a_{n+2}x^{n+1} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}((n+2)^2 a_{n+2} + \omega^2 a_n)x^{n+1} = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve donc que, pour tout entier naturel n :

$$(n+2)^2 a_{n+2} + \omega^2 a_n \Leftrightarrow a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+2)^2}.$$

b) En déduire la valeur de a_{2n+1}, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Par une récurrence immédiate, à l'aide de **Q4** pour l'initialisation ($a_1 = 0$) et de la question précédente pour justifier l'hérédité, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0.$$

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} n!^2} a_0.$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n)$, avec

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} n!^2} a_0. \text{ »}$$

Initialisation. $\dfrac{(-1)^0 \times \omega^{2\times 0}}{2^{2\times 0} \times 0!^2} = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque, $\mathcal{P}(n)$. Ainsi : $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} n!^2} a_0$.

On déduit alors de **Q5(a)** l'égalité suivante :

$$a_{2(n+1)} = -\frac{\omega^2 a_{2n}}{(2n+2)^2} = -\frac{(-1)^n \omega^2 \omega^{2n}}{2^2 \times (n+1)^2 \times 2^{2n} \times n!^2} a_0 = \frac{(-1)^{n+1} \omega^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)} (n+1)!^2} a_0.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion. On déduit de ce qui précède ($\mathcal{P}(0)$, et $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque), par le principe de récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

Q6. **a)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} x^{2n} = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} x^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(-\omega^2 x^2)^n a_0}{2^{2n} n!^2} \right) = 0$, par croissance comparée.

b) En déduire le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.

On déduit des questions **Q5(b)** et **Q6(a)** que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$.

Or, toute suite réelle convergente est bornée. Donc, par définition du rayon de convergence d'une série entière, on en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $+\infty$.

Partie C - Calcul approché

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}.$$

Pour tout réel a, l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p - 1 < a \leqslant p$ est appelé la partie entière supérieure de a, et on le note $\lceil a \rceil$. De manière équivalente, $\lceil a \rceil$ est le plus petit entier qui soit supérieur ou égal à a.

Q7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note $n_x = \lceil |x| - 1 \rceil$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_x} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}$ vérifie le théorème des séries alternées.

Si on pose $u_n = \dfrac{x^{2n}}{n!^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_x$, alors la suite $(u_n)_{n \geqslant n_x}$ est strictement positive et décroissante.
En effet, $x \in \mathbb{R}^*$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n} > 0$, puis $u_n > 0$ et, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 < 1.$$

Par ailleurs, cette suite est convergente et admet pour limite 0.

En conclusion, la série $\sum_{n \geqslant n_x} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}$ vérifie le théorème des séries alternées et est, de ce fait, convergente.

Dans la suite, on admet que le résultat de la question précédente implique que

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2} \right| \leqslant \frac{x^{2(N+1)}}{(N+1)!^2}$$

pour tout entier $N \geqslant n_x$.

Q8. La fonction `fapprox` ci-dessous prend en entrée un réel x non nul, un réel strictement positif ε, et renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près, c'est-à-dire un réel y tel que $|f(x) - y| \leqslant \varepsilon$. Recopier la fonction Python `fapprox` et la compléter.

Note : les fonctions « valeur absolue » et « partie entière supérieure » s'écrivent respectivement `abs` et `math.ceil` (à partir de la bibliothèque `math`) en Python.

```python
import math
def fapprox(x, eps):
        nx = math.ceil(abs(x) - 1)
        y = 0
        t = ...
        n = ...
        while ... or ...:
                y = y + t
                n = n + 1
                t = -t * x**2 / n**2
        return y
```

```python
import math
def fapprox(x, eps):
        nx = math.ceil(abs(x) - 1)
        y = 0
        t = 1
        n = 0
        while n < nx or abs(t) > eps:
                y = y + t
                n = n + 1
                t = -t * x**2 / n**2
        return y
```

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$. On définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 2z - z^2$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$, tel que $z \neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2 = 2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

Q1. Montrer que le quadrilatère $\mathrm{OM_1M_2N}$ est un parallélogramme.

$$\begin{aligned}
&z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_1} - z_O = z_1 - 0 = z^2 \\
&z_{\overrightarrow{NM_2}} = z_{M_2} - z_N = z_2 - f(z) = 2z - \left(2z - z^2\right) = z^2 = z_{\overrightarrow{OM_1}} \\
&\text{donc } \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{NM_2}
\end{aligned}$$

Le quadrilatère OM_1M_2N est donc bien un parallélogramme.

Q2. Donner le module de z_1 et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.

- $|z_1| = |z^2| = (|z|)^2 = (1)^2 = 1$
- $\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(z^2) + 2k\pi = 2 \times \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Q3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

- On commence par construire M_1

$$|z_1| = 1 \text{ et } \operatorname{Arg}(z_1) \equiv 2 \times \operatorname{Arg}(z)[2\pi]$$

  Donc M_1 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$
- puis on construit M_2 :
  $z_2 = 2z$ donc M_2 est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- Enfin on construit N comme quatrième sommet du parallélogramme OM_1M_2N.

Partie B - Tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(t)$ le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point d'affixe $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $\mathrm{N}(t)$.

Q4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t, \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z_N = f(z) = 2z - z^2 = 2 * \mathrm{e}^{it} - \left(\mathrm{e}^{it}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{i2t}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
x(t) + iy(t) &= 2(\cos t + i\sin t) - (\cos(2t) + i\sin(2t)) \\
&= (2\cos t - \cos(2t)) + i(2\sin t - \sin(2t))
\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et parties imaginaires :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

Q5. **a)** Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) - \cos 2(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) - \cos(2t+4\pi) \\ y(t+2\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin 2(t+2\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin(2t+4\pi) \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = 2\cos t - \cos 2t = x(t) \\ y(t+2\pi) = 2\sin t - \sin 2t = y(t) \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont donc bien 2π–périodiques.

b) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, montrer que le point $\mathrm{N}(-t)$ se déduit du point $\mathrm{N}(t)$ par une symétrie que l'on précisera.
pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(-t) = 2\cos(-t) - \cos 2(-t) = 2\cos(-t) - \cos(-2t) \\ y(-t) = 2\sin(-t) - \sin 2(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} x(-t) = 2\cos t - \cos 2t = x(t) \\ y(-t) = -2\sin t - (-\sin 2t) = -(2\sin t - \sin 2t) = -y(t) \end{cases}$$

Le point $N(-t)$ se déduit donc du point $N(t)$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

c) Déduire des questions 5(a) et 5(b) un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.
Nous allons étudier la courbe paramétrée sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.
Nous obtiendrons ensuite la courbe paramétrée sur l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$ par symétrie d'axe l'axe des abscisses (voir question 2(b)) et nous aurons ainsi la totalité de la courbe paramétrée sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par périodicité de x et y (voir question 5.(a)).

Q6. **a)** Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$, puis étudier leur signe. *On rappelle les formules trigonométriques suivantes :*

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Dérivabilité de x et y :
x et y sont des sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$:

Formules utilisées : $(2u)' = 2u', (\cos u)' = -u'\sin u$ et $(\sin u)' = u'\cos u \ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = 2(-\sin t) - (-2\sin 2t) = 2(\sin(-t) - \sin(-2t)) \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2(\cos t - \cos 2t) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 2\left(2\cos\frac{(-t)+(-2t)}{2}\sin\frac{(-t)-(-2t)}{2}\right) = 4\cos\frac{-3t}{2}\sin\frac{t}{2} \\ y'(t) = 2\left(-2\sin\frac{t+(-2t)}{2}\sin\frac{t-(-2t)}{2}\right) = -4\sin\frac{-t}{2}\sin\frac{3t}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2} \\ y'(t) = 4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2} \end{cases}$$

Signe de $x'(t)$:

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{3t}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\cos\frac{3t}{2}$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\frac{t}{2}$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{t}{2}$	0	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0

Signe de $y'(t)$:

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{t}{2}$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{t}{2}$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	1
$\frac{3t}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\frac{3t}{2}$	0	$+$	1	$+$	0	-	-1
signe de $y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	-	-4

b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t), x'(t), y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
variations de x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
signe de $y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
variations de y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Q7. Montrer que pour tout réel $t \in]0, \pi]$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $\mathrm{N}(t)$.
Soit $t \in]0, \pi]$,

$$\overrightarrow{M(t)N(t)}\begin{pmatrix}(2\cos t - \cos 2t) - (\cos t)\\(2\sin t - \sin 2t) - (\sin t)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{M(t)N(t)}\begin{pmatrix}\cos t - \cos 2t\\ \sin t - \sin 2t\end{pmatrix}$$

Or la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$ a pour vecteur directeur :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}2(-\sin t) - (-2\sin 2t)\\ 2\cos t - 2\cos 2t\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}2(-\sin t + \sin 2t)\\ 2(\cos t - \cos 2t)\end{pmatrix}$$

Donc :
$\left\langle \overrightarrow{M(t)N(t)} \mid v \right\rangle$
$= (\cos t - \cos 2t) \times 2(-\sin t + \sin 2t) + (\sin t - \sin 2t) \times 2(\cos t - cos 2t)$
$= -2(\cos t - \cos 2t)(\sin t - \sin 2t) + 2(\cos t - \cos 2t)(\sin t - \sin 2t)$
$= 0$
Donc Le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$.

Q8. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $\mathrm{N}(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.
Détail des points et tangentes

En $t = 0$:
$x'(0) = y'(0) = 0$ donc N_0 est un point singulier et $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t - (-2)(2)\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t - 2(-2)\sin 2t \end{cases}$$

donc :

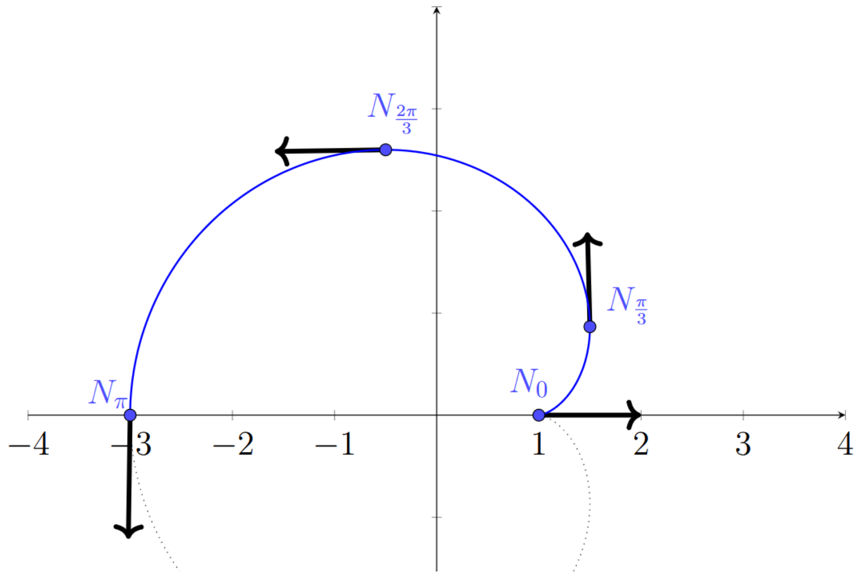
$$\begin{cases} x''(0) = -2\cos 0 - (-2)(2)\cos 0 = 2 \\ y''(t) = -2\sin t - 2(-2)\sin 2t = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe a pour vecteur tangent $v_0\binom{2}{0}$ en $N_0(1,0)$.

En $t=\frac{\pi}{3}$:
$x'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ et $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$
Donc $N_{\frac{\pi}{3}}$ est un point régulier et la courbe a pour vecteur tangent $v_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}\binom{0}{2}$ en $N_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En $t=\frac{2\pi}{3}$:
$x'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2$ et $y'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$
Donc $N_{\frac{2\pi}{3}}$ est un point régulier et la courbe a pour vecteur tangent $v_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\binom{-2}{0}$ en $N_{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En $t=\pi$:
$x'(\pi)=0$ et $y'(\pi)=-4$.
Donc N_π est un point régulier et la courbe a pour vecteur tangent $v_{(\pi)}\binom{0}{-4}$ en $N_\pi\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



Q9. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)^2 + \left(4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2\left[\left(\cos\frac{3t}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{3t}{2}\right)^2\right]}\mathrm{d}t$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2 \times 1}\ \mathrm{d}t$$

$$L = 4 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

$$L = 4 \times 2 \times \int_{0}^{\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

$$L = 8 \times \int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t$$

$$L = 8 \times \left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$L = -16 \times \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$L = -16 \times (0 - 1)$$

$L = 16$ unités de longueur