Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

La plupart des notions de ce chapitre sont des notions vues en première année. Aucun des résultats de TSI 1 ne sera démontré dans ce chapitre, libre à vous de retrouver les démonstrations manquantes dans votre cours de première année.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires et il sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
n et p désigneront deux entiers naturels non nuls.

1 Rappels et compléments sur les matrices

Notations :

- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices possédants n lignes et p colonnes et dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}$.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées possédants n lignes et n colonnes et dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k\ell}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{i\ell}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec :

$$c_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{k\ell}$$

Attention en général : $AB \neq BA$.

Application 1.2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$.

Définition 1.3. *Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$AB = BA = I_n$$

Méthode 1.4. *A ce stade de l'année nous disposons de deux méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse :*

- *Grâce à une indication de l'énoncé de l'exercice trouver une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.*
- *Utiliser la matrice augmentée $A \mid I_n$ et à l'aide d'opérations sur les lignes se ramener à $I_n \mid A^{-1}$.*

Application 1.5. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si c'est le cas, déterminer son inverse.*

Proposition 1.6. *Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A \times B$ est une matrice inversible et on a :*

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

Théorème 1.7. ***Formule du binôme***
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ (on dit que A et B commutent). Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} A^i B^{k-i}.$$

Définition 1.8. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

- *On appelle **noyau** de la matrice A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, l'ensemble :*

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0_{n,1}\}$$

- *On appelle **image** de la matrice A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'ensemble :*

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX / X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Application 1.9. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.*
Déterminer $\ker(A)$ et $Im(A)$.

Définition 1.10. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
*On dit que A et B sont **semblables** si, et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $A = PBP^{-1}$.*

Définition 1.11. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.*
*On appelle **trace** de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, le scalaire égal à la somme des éléments diagonaux de A :*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple 1.12.

- *Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, on a*

$$\operatorname{tr}(A) = 2 + 1 + 0 = 3.$$

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}(I_n) = n$

Proposition 1.13. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \quad \textit{et} \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Remarque 1.14. *La deuxième égalité vient du fait que, même si $AB \neq BA$ en général, AB et BA ont les mêmes éléments diagonaux.*

Proposition 1.15. *Deux matrices semblables ont la même trace.*

Preuve :

Définition 1.16. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A et on note A^T la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ défini par :*

$$A^T = (a_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant i \leqslant n}$$

Application 1.17. *Écrire les transposées des matrices suivantes :*

- *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *on a :* $A^T =$.
- *Soit* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, *on* a : $B^T =$.
- *Soit* $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, *on a :* $C^T =$

Définition 1.18. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:*

- *Lorsque $A^T = A$ on dit que A est une matrice **symétrique**.*
- *Lorsque $A^T = -A$ on dit que A est une matrice **antisymétrique**.*

Exemple 1.19. *La matrice C de l'exemple précédent est une matrice symétrique.*

Proposition 1.20.

- $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ *et* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *:*
$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\forall B \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T \times A^T$
- *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible alors* A^T *est inversible et :*
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$
- $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}\left(A^T\right) = \operatorname{tr}(A)$

Preuve :

2 Généralités sur les espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1. *Soit E un ensemble muni d'une opération d'addition notée $+$ et d'une opération de multiplication par un réel notée . On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** lorsque :*

- $(E, +)$ *est un groupe commutatif, c'est-à-dire :*
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} \in E.$ *(Loi interne)*
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$ *(Associativité)*
  - $\exists \overrightarrow{0_E} \in E$ *tel que* $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E} + \vec{u} = \vec{u}.$ *(Élément nul)*
  - $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,$ *tel que* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{0_E}\cdot$ *(on notera $\vec{v} = -\vec{u}$) (Opposé)*
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$ *(Commutativité)*
- *l'opération $\cdot$ vérifie :*
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K},$ *et* $\forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot \vec{u} \in E.$

- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall\vec{u}\in E, \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})=(\lambda\mu)\cdot\vec{u}$.
- $\forall\vec{u}\in E, 1\cdot\vec{u}=\vec{u}$.
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall\vec{u}\in E, (\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(\vec{u},\vec{v})\in E^2, \lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$

Remarque 2.2. *En pratique on utilise presque jamais cette définition pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Nous verrons comment répondre à ce genre de question dans la partie suivante.*

Cette définition sert surtout à comprendre quelles sont les opérations autorisées sur les éléments d'un espace vectoriel.

Dans tout le chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et on dira tout simplement E est un espace vectoriel.

Exemple 2.3.

Notation	*Description*
$\mathbb{K}^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	*ensemble des n -uplets de scalaires (notation : $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$)*
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	*ensemble des matrices à n lignes et p colonnes*
$\mathbb{K}[X]$	*ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$*
$\mathbb{K}_n[X]\ (n\in\mathbb{N}^*)$	*ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n*
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	*ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$*
$\mathbb{K}^{\Omega}$	*ensemble des fonctions définies sur Ω non vide et à valeurs dans $\mathbb{K}$*
$\mathscr{F}(X,F)$	*ensemble des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F*

2.2 Familles de vecteurs

2.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré

Définition 2.4. *Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E et $\vec{v}$ un vecteur de E. On dit que $\vec{v}$ est une **combinaison linéaire** de la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$, s'il existe une partie finie J de I et une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que :*

$$\vec{v}=\sum_{j\in J}\lambda_j\vec{u}_j$$

Exemple 2.5. *$\vec{u}_1+\vec{u}_{10}+\vec{u}_{20}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N}k(-1)^k\vec{u}_k$ est une autre combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Application 2.6. *Soit $M=\begin{pmatrix}3&4\\-7&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}$. La matrice M est-elle une combinaison linéaire de (A,B)?*

Définition 2.7. *Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de cette famille est un sous-ensemble de E appelé* ***sous-espace engendré par la famille*** *$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ et noté* $\mathrm{Vect}\,(\vec{u}_i)_{i\in I}$.

Exemple 2.8. $\mathbb{K}[X] = Vect(1, X, ..., X^k, ...) = Vect(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Application 2.9. *Considérons l'ensemble* $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaire d'une famille de matrices.

2.2.2 Familles génératrices

Définition 2.10. *Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E. On dit que la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est* ***génératrice*** *de E, ou encore engendre E, si, et seulement si, on a* $E = \mathrm{Vect}\,(\vec{u}_i)_{i\in I}$.

Exemple 2.11.
- *On remarque que*

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n[X] &= \{a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n / (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(1, X, \ldots, X^n)\end{aligned}$$

Donc la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$.

- *De même, la famille infinie* $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}[X]$.

Méthode 2.12. *Je dois savoir trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel* E *: il suffit pour cela d'écrire* E *sous la forme* $Vect(\ldots)$ *donc c'est exactement la même méthode que le point précédent.*

Application 2.13. *Considérons l'ensemble* $E = \left\{\begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$. *Trouver une famille génératrice de* E.

Proposition 2.14. *Si* $\mathscr{F}$ *est une famille génératrice de* E *alors :*

- *pour tout* $\vec{u} \in E, (\mathscr{F}, \vec{u})$ *est aussi une famille génératrice de* E
- *si on change l'ordre des vecteurs de la famille* $\mathscr{F}$ *alors la famille reste une famille génératrice de* E
- *si on multiplie un ou plusieurs vecteurs de* $\mathscr{F}$ *par un scalaire non nul alors la nouvelle famille est aussi génératrice de* E.

Exemple 2.15. $\mathrm{Vect}((1,1),(1,2),(3,1),(3,3))$
$= \mathrm{Vect}((1,1),(1,2),(3,1),(1,1))$ *on multiplie le dernier vecteur par* $\frac{1}{3}$
$= \mathrm{Vect}((1,1),(1,2),(3,1))$ *inutile de garder deux fois le même vecteur*
$= \mathrm{Vect}((1,1),(3,1),(1,2))$ *modification de l'ordre*
$= \mathrm{Vect}((1,1),(3,1),(1,2),(4,2))$ *on peut ajouter dans la famille n'importe quel vecteur combinaison linéaire des autres.*

2.2.3 Familles libres

Définition 2.16.

- *Une famille finie* $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ *de vecteurs de* E *est dite* ***libre*** *si, et seulement si, pour tout* p *-uplet* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ *on a :*

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

- *Une famille infinie* $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$ *de vecteurs de* E *est dite* ***libre*** *si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre.*

Une famille qui n'est pas libre est dite ***liée****.*

Application 2.17. *La famille* $\left(1+X+X^2, 3+X+5X^2, 2+X+3X^2\right)$ *est-elle une famille libre ou liée de* $\mathbb{R}[X]$*?*

Application 2.18. *On considère la famille* (f, g, h) *composée de trois fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par :*

$$f : x \mapsto \sin(x) \quad g : x \mapsto \cos(x) \quad h : x \mapsto \sin(2x)$$

Montrer que cette famille est libre.

Application 2.19. *On considère* E *l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, on note* f_a *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_a(x) = |x-a|.$$

Montrer que la famille infinie $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ *est libre.*

Proposition 2.20. *Soit E un espace vectoriel.*

- *Si on change l'ordre des vecteurs d'une famille libre (resp. liée), on obtient encore une famille libre (resp. liée).*
- *Une famille contenant un seul vecteur est libre si, et seulement si, le vecteur est non nul.*
- *La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u_1} = \lambda \overrightarrow{u_2}$ ou $\overrightarrow{u_2} = \lambda \overrightarrow{u_1}$. On dit alors que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont* ***colinéaires****.*
- *Une famille contenant 3 vecteurs est libre si, et seulement si, les vecteurs ne sont pas coplanaires.*
- *Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*
- *Toute famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.*
- *Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de E et $\vec{u}$ un vecteur de E. La famille $(\mathscr{F}, \vec{u})$ est liée si, et seulement si, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$.*

Il est aussi important de connaitre cette propriété sur les familles de polynômes :

Proposition 2.21. *Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une famille de polynômes non nuls tels que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) < \deg(P_{k+1}) \text{ (échelonnée en degrés).}$$

Alors cette famille est libre.

Exemple 2.22. *On peut affirmer, sans démonstration, que la famille*

$$\{1, X^5 + 2X^3, X^2 + 1, X^4\}$$

est libre car, en la réordonnant, on peut obtenir une famille de polynômes échelonnée en degrés.

3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

Définition 3.1. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E si et seulement si :*

- *F est un sous-ensemble de E*
- *F est non vide*
- *pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs de F et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur de F*

Proposition 3.2. *Si F est un sous espace vectoriel de E alors F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.*

Proposition 3.3. *Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$une famille (finie ou non) de vecteurs de E. Alors le sous-espace engendré $\operatorname{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Méthode 3.4. *Il faut savoir montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné ou classique. Il existe deux principales méthodes :*

- *utiliser la définition*
- *écrire l'ensemble sous la forme $Vect(\cdots)$ et conclure grâce à la propriété précédente.*

Application 3.5. *Montrer, en utilisant les deux méthodes, que l'ensemble $E = \{aX^2 + 2aX + 3b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Méthode 3.6. *Pour montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel classique.*

Application 3.7. *On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.*

Proposition 3.8. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Attention : ce n'est en général pas vrai pour la réunion de deux sous-espaces.

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition

4.1.1 Base

Définition 4.1. *On appelle* ***base*** *de E toute famille à la fois libre et génératrice de E.*

Par conséquent, la famille $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E peut s'écrire, de manière unique, comme une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$.
Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les **coordonnées du vecteur** dans la base $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$.

Définition 4.2. *Soit E un espace vectoriel et soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée la* ***matrice colonne des coordonnées*** *de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Méthode 4.3. *Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.*

Pour trouver les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ il faut trouver les réels $(a_i)_{i\in I}$ tels que :

$$\vec{u} = \sum_{i\in I} a_i \overrightarrow{e_i}$$

c'est donc exactement la même méthode que pour savoir si $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$.

La matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$ se note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$ *et elle est égale à* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Application 4.4. *On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathscr{B} = (R_0, R_1, R_2)$ où $R_0 = 1, R_1 = X + 2$ et $R_2 = X^2 - 2$ On considère le polynôme $P = 4X^2 - 3X - 12$. Quelle est la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$?*

Définition 4.5. *Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ deux bases de E. On appelle* ***matrice de passage*** *de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées de $\overrightarrow{f_j}$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Méthode 4.6. *Construire une matrice de passage.*
Si $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ sont deux bases alors pour construire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ je mets dans la $j^{\text{ème}}$ colonne les coordonnées du vecteur f_j dans la bases $\mathscr{B}$.

Application 4.7. *Soient $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2, R_3)$, avec :*

$$R_0(X) = 1 \;\; R_1(X) = X - 1, R_2(X) = (X-1)^2, R_3(X) = (X-1)^3$$

une autre base de cet espace. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

Proposition 4.8. *Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une matrice inversible et :*

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

Proposition 4.9. *On considère $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Pour tout $\vec{u} \in E$, on a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\vec{u})$$

Dans certains des espaces vectoriels classiques certaines bases sont à connaître par coeurs. Ce sont des bases dites **canoniques**.

Théorème 4.10. *Bases canoniques Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $e_i = (0, \ldots, 0\ 0, \ldots, 0)$ ième place La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*
- *Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne qui vaut 1 . La famille $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, \ldots, E_{2p}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{np})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $P_i(X) = X^i$ La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*
- *La famille infinie $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.*

Sur l'ensemble des polynômes on possède aussi cette propriété qui permet d'éviter quelques calculs :

Proposition 4.11. *Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls tels que $\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) = k$ Alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.*

Exemple 4.12. *La famille $\left((X-2)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$*

4.1.2 Dimension

Définition 4.13. *On dit que E est un espace vectoriel de* ***dimension finie*** *s'il existe une famille génératrice finie.*

Théorème 4.14. *Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base.*

Théorème 4.15. *Soit E un espace de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé* ***dimension de l'espace vectoriel*** *E et est noté $\dim(E)$. Par convention on dira que l'espace $\{0\}$ est de dimension 0 .*

Théorème 4.16. *Dimensions des espaces vectoriels de référence*

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
- $\mathbb{K}[X]$ *est de dimension infinie.*

Proposition 4.17. *Soit E un espace de dimension finie n :*

- *Toute famille libre (resp. génératrice) de n vecteurs est une base de E*
- *Toute famille libre possède au plus n vecteurs.*
- *Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.*

Conséquence : Dans un espace de dimension n, toute famille de strictement plus de n vecteurs est donc forcément liée et toute famille de strictement moins de n vecteurs n'est jamais génératrice.

Théorème 4.18. ***Théorème de la base incomplète.***
Soit E un espace de dimension finie n et $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre de E. Alors il existe des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Théorème 4.19. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E. Alors F est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus :*

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$$

Application 4.20. *Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = Vect(3, X-1, (X-4)^2)$. Démontrer que $E = F$.*

Définition 4.21. *Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle* ***rang*** *de cette famille, et on note $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$, la dimension de l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$.*

Méthode 4.22. *Montrer qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel.*

On dispose de deux méthodes :

- ***Méthode 1 :*** *s'applique lorsqu'on ne connait pas la dimension de E*
  On montre que la famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de E.
- ***Méthode 2 :*** *elle s'applique lorsqu'on connait la dimension de E.*
  On montre que $\mathscr{B}$ est une famille libre (ou génératrice) de E puis on dit :" la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre (resp. génératrice) telle que $card(\mathscr{B}) = \dim(E) = n$ *donc $\mathscr{B}$ est une base de E.*

Application 4.23. *Montrer que la famille*

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Méthode 4.24. *Trouver une base d'un espace vectoriel donné.*
On commence par trouver une famille génératrice de E (voir méthode sur les familles génératrices), puis on montre que cette famille est libre. Enfin on conclut.

Application 4.25. *Déterminer une base de l'espace-vectoriel*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Méthode 4.26. *Calculer la dimension d'un espace vectoriel donné.*

- *S'il s'agit d'un espace vectoriel classique, on utilise les résultats du cours*
- *S'il s'agit d'un nouvel espace vectoriel défini dans l'énoncé de votre exercice alors LA SEULE MÉTHODE possible consiste à trouver une base puis compter le nombre de vecteurs dans la base. Ce nombre est la dimension cherchée.*

Application 4.27. *Déterminer la dimension de l'espace vectoriel*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \;\; et \;\; 3y - z = 0\}.$$

Méthode 4.28. *Calculer le rang d'une famille de vecteurs*

Il faut poser $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ *et calculer la dimension de* F.

Application 4.29. *On pose* $P = 2X + 1, Q = X^2 + 1$ *et* $R = 2X^2 + 2X + 3$
Quel est le rang de la famille (P, Q, R) *de* $\mathbb{R}[X]$?

5 Somme de sous-espaces vectoriels

5.1 Deux sous-espaces vectoriels

5.1.1 En dimension quelconque

Définition 5.1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $\{\vec{f}+\vec{g},(\vec{f},\vec{g}) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme** de F et G et noté $F+G$*

Définition 5.2. *On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont en **somme directe** si tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On notera alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.*

Proposition 5.3. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{0_E\}$.*

Définition 5.4. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si, et seulement si, tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u}=\vec{f}+\vec{g}$ avec $(\vec{f},\vec{g}) \in F \times G$.
On dit alors que E est somme directe de F et G, et on note :*

$$E = F \oplus G.$$

Proposition 5.5. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *F et G sont supplémentaires dans E ;*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F+G$.*

Application 5.6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.*

Application 5.7. *On considère $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et I le sous-espace vectoriel des fonctions impaires et P le sous-espace vectoriel des fonctions paires.*
Montrer que P et I sont supplémentaires dans $\mathscr{F}$.

5.1.2 En dimension finie

On se place dans un espace E de dimension finie.

Théorème 5.8. ***Formule de Grassman***
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Grâce à cette formule on dispose, en dimension finie, de méthodes supplémentaires pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :

Proposition 5.9. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. F et G sont supplémentaires ;
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$;
3. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;
4. $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition 5.10.
- *Si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de F et $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de G et que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E alors la famille $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p)$ est une base de E. On dit que c'est une* ***base adaptée*** *à la somme directe $F \oplus G$.*
- *Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E alors*

$$F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) \text{ et } G = \mathrm{Vect}\,(u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

sont supplémentaires.

Application 5.11. *On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère les deux sous-espaces vectoriels suivant :*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\right\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.

5.2 Plusieurs sous-espaces vectoriels

Définition 5.12. *Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle* ***somme*** *des sous-espaces $(F_1, \ldots, F_p)$ le sous-espace vectoriel :*

$$F = \sum_{i=1}^{p} F_i = F_1 + \ldots + F_p = \left\{\vec{f_1} + \ldots + \vec{f_p} / \forall i \in [\![1; p]\!], \vec{f_i} \in F_i\right\}$$

Définition 5.13. *On dit que la somme $F = F_1 + \ldots + F_p$ est* ***directe*** *si tout vecteur de F se décompose de manière unique comme somme de vecteurs de $(F_i)_{i=1,\ldots,n}$. On notera alors $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.*

Proposition 5.14. *La somme* $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ *est directe si, et seulement si, pour* $\vec{f_1} \in F_1, \vec{f_2} \in F_2, \ldots, \vec{f_p} \in F_p$ *on a :*

$$\vec{f_1} + \ldots + \vec{f_p} = \overrightarrow{0} \iff \vec{f_1} = \vec{f_2} = \ldots = \vec{f_p} = \overrightarrow{0}$$

Application 5.15. *On se place dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}[X]$ *et on fixe* $p \in \mathbb{N}^*$*. Pour tout entier* $k \in [\![1;p]\!]$*, on pose* $F_k = \mathrm{Vect}\Big(X^k(X-1)\Big)$*. Montrer que les sous-espaces vectoriels* $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *sont en somme directe.*

Proposition 5.16. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel de dimension* n *et* $F_1, \ldots, F_p$ *des sous-espaces vectoriels de* E *tels que :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$$

On dit que la famille $(F_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ *est une* ***décomposition en somme directe*** *de* E*.*
De plus si, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$*, on considère* $\mathscr{B}_i$ *une base de* F_i*, alors la réunion des bases* $\mathscr{B}_i$ *est une base de* E*. On dit que c'est une* ***base adaptée à la décomposition en somme directe****.*

6 Hyperplans

Dans toute cette partie E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ finie.

Définition 6.1. *On dit qu'un sous-espace vectoriel de* E *est un* ***hyperplan*** *de* E *si, et seulement s'il est de dimension* $n-1$*.*

Proposition 6.2. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*.*
F *est un hyperplan de* E *si, et seulement s'il admet une droite vectorielle comme supplémentaire autrement dit, s'il existe* $\vec{u} \in E, \vec{u} \neq \overrightarrow{0}$ *tel que :*

$$E = F \oplus \mathrm{Vect}(\vec{u}).$$

Théorème 6.3. *Équation d'un hyperplan.*
Soit F un hyperplan de E et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls tels que :

$$\vec{x} \in F \Longleftrightarrow a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}$. La relation

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

*s'appelle **l'équation de l'hyperplan F** dans la base $\mathscr{B}$.*

Remarque 6.4. *Lorsque la base $\mathscr{B}$ est fixé, les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas uniques mais ils sont définis à une constante multiplicative près.*

Application 6.5. *Montrer que* $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}'(0) = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et en donner une équation.*