

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

La plupart des notions de ce chapitre sont des notions vues en première année. Aucun des résultats de TSI 1 ne sera démontré dans ce chapitre, libre à vous de retrouver les démonstrations manquantes dans votre cours de première année.

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne le corps des scalaires et il sera égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

n et p désigneront deux entiers naturels non nuls.

1 Rappels et compléments sur les matrices

Notations :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices possédants n lignes et p colonnes et dont les coefficients appartiennent à \mathbb{K} .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées possédants n lignes et n colonnes et dont les coefficients appartiennent à \mathbb{K} .

Définition 1.1.

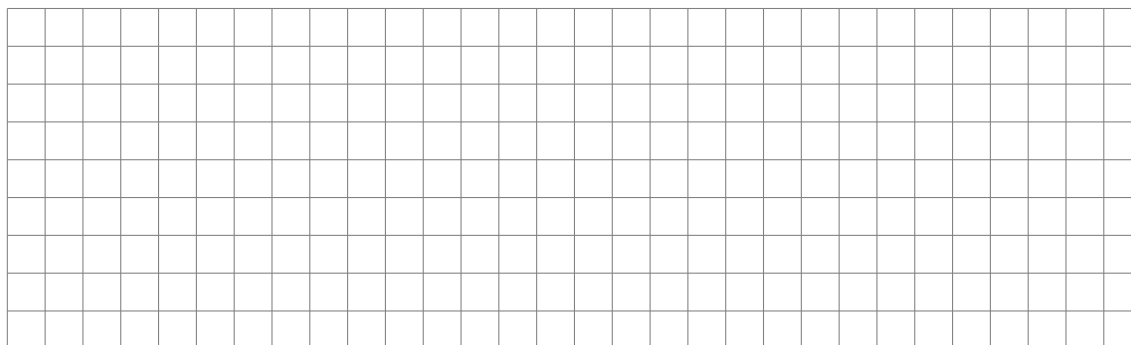
Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kl}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{il}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec :

$$c_{il} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl}$$

Attention en général : $AB \neq BA$.

Application 1.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$.



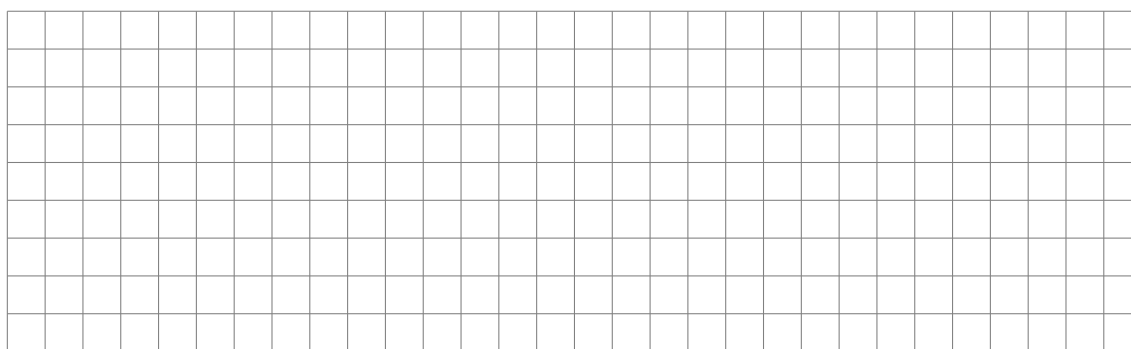
Définition 1.3. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Méthode 1.4. A ce stade de l'année nous disposons de deux méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse :

- Grâce à une indication de l'énoncé de l'exercice trouver une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
- Utiliser la matrice augmentée $A \mid I_n$ et à l'aide d'opérations sur les lignes se ramener à $I_n \mid A^{-1}$.

Application 1.5. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si c'est le cas, déterminer son inverse.



Proposition 1.6. Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A \times B$ est une matrice inversible et on a :

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

Théorème 1.7. Formule du binôme

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ (on dit que A et B commutent). Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

Définition 1.8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle **noyau** de la matrice A , et on note $\text{Ker}(A)$, l'ensemble :

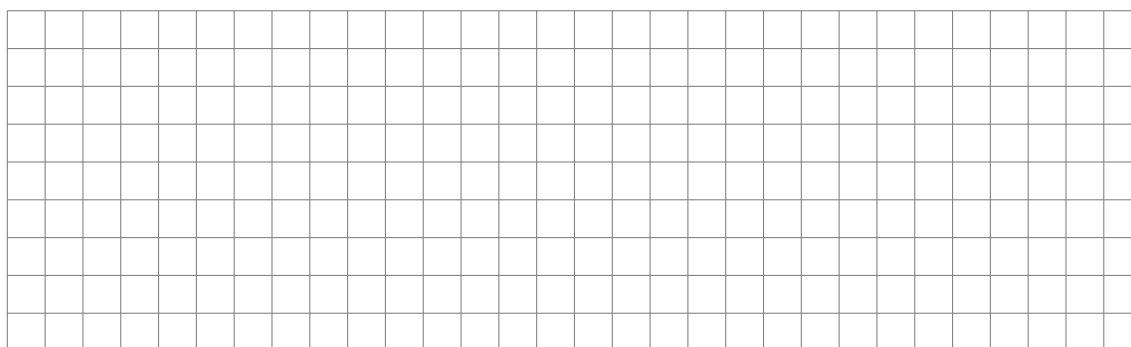
$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0_{n,1}\}$$

- On appelle **image** de la matrice A , et on note $\text{Im}(A)$, l'ensemble :

$$\text{Im}(A) = \{AX / X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Application 1.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$.



Définition 1.10. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont **semblables** si, et seulement si, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $A = PBP^{-1}$.

Définition 1.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On appelle **trace** de A , et on note $\text{tr}(A)$, le scalaire égal à la somme des éléments diagonaux de A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Exemple 1.12. • Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, on a

$$\text{tr}(A) = 2 + 1 + 0 = 3.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(I_n) = n$

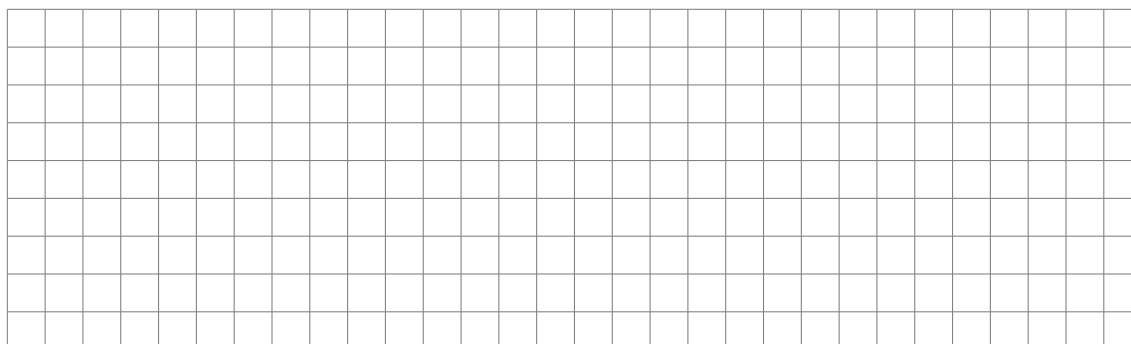
Proposition 1.13. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Remarque 1.14. La deuxième égalité vient du fait que, même si $AB \neq BA$ en général, AB et BA ont les mêmes éléments diagonaux.

Proposition 1.15. Deux matrices semblables ont la même trace.

Preuve :



Définition 1.16. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A et on note A^T la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ défini par :

$$A^T = (a_{j,i})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$$

Application 1.17. Écrire les transposées des matrices suivantes :

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $A^T =$.
- Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, on a : $B^T =$.
- Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $C^T =$

Définition 1.18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- Lorsque $A^T = A$ on dit que A est une matrice **symétrique**.
- Lorsque $A^T = -A$ on dit que A est une matrice **antisymétrique**.

Exemple 1.19. La matrice C de l'exemple précédent est une matrice symétrique.

Proposition 1.20. • $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

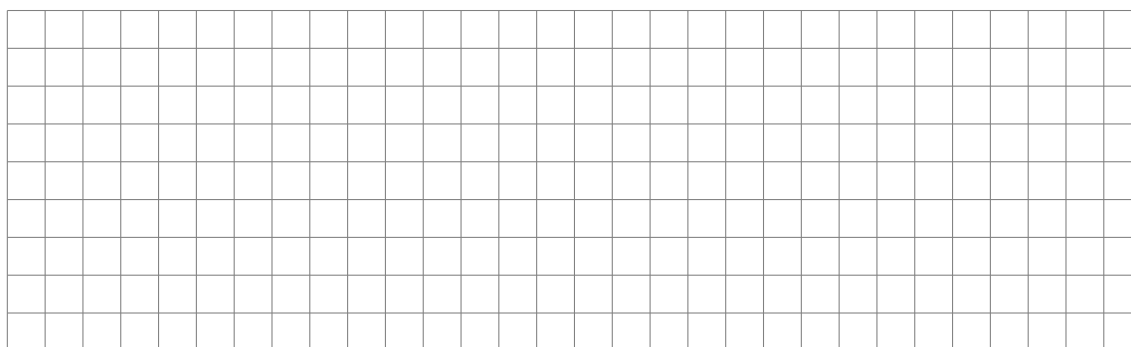
$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\forall B \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T \times A^T$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors A^T est inversible et :

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Preuve :



2 Généralités sur les espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1. Soit E un ensemble muni d'une opération d'addition notée $+$ et d'une opération de multiplication par un réel notée \cdot . On dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -**espace vectoriel** lorsque :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :
 - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} \in E.$ (Loi interne)
 - $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$ (Associativité)
 - $\exists \vec{0}_E \in E$ tel que $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u}.$ (Élément nul)
 - $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}_E.$ (on notera $\vec{v} = -\vec{u}$) (Opposé)
 - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$ (Commutativité)
- l'opération \cdot vérifie :
 - $\forall \lambda \in \mathbb{K},$ et $\forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot \vec{u} \in E.$

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$.
- $\forall \vec{u} \in E, 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{u} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

Remarque 2.2. En pratique on utilise presque jamais cette définition pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Nous verrons comment répondre à ce genre de question dans la partie suivante.

Cette définition sert surtout à comprendre quelles sont les opérations autorisées sur les éléments d'un espace vectoriel.

Dans tout le chapitre E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel et on dira tout simplement E est un espace vectoriel.

Exemple 2.3.

Notation	Description
$\mathbb{K}^n (n \in \mathbb{N}^*)$	ensemble des n -uplets de scalaires (notation : (x_1, x_2, \dots, x_n))
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans le corps \mathbb{K}
$\mathbb{K}_n[X] (n \in \mathbb{N}^*)$	ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	ensemble des suites d'éléments de \mathbb{K}
\mathbb{K}^{Ω}	ensemble des fonctions définies sur Ω non vide et à valeurs dans \mathbb{K}
$\mathcal{F}(X, F)$	ensemble des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F

2.2 Familles de vecteurs

2.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré

Définition 2.4. Soit $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E et \vec{v} un vecteur de E . On dit que \vec{v} est une **combinaison linéaire** de la famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$, s'il existe une partie finie J de I et une famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathbb{K} tels que :

$$\vec{v} = \sum_{j \in J} \lambda_j \vec{u}_j$$

Exemple 2.5. $\vec{u}_1 + \vec{u}_{10} + \vec{u}_{20}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^N k(-1)^k \vec{u}_k$ est une autre combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Application 2.6. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice M est-elle une combinaison linéaire de (A, B) ?



Définition 2.7. Soit $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de cette famille est un sous-ensemble de E appelé **sous-espace engendré par la famille** $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ et noté $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i \in I}$.

Exemple 2.8. $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k, \dots) = \text{Vect}(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Application 2.9. Considérons l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaire d'une famille de matrices.



2.2.2 Familles génératrices

Définition 2.10. Soit $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E . On dit que la famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est **génératrice** de E , ou encore engendre E , si, et seulement si, on a $E = \text{Vect}(\vec{u}_i)_{i \in I}$.

Exemple 2.11. • On remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n[X] &= \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n / (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} \\ &= \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) \end{aligned}$$

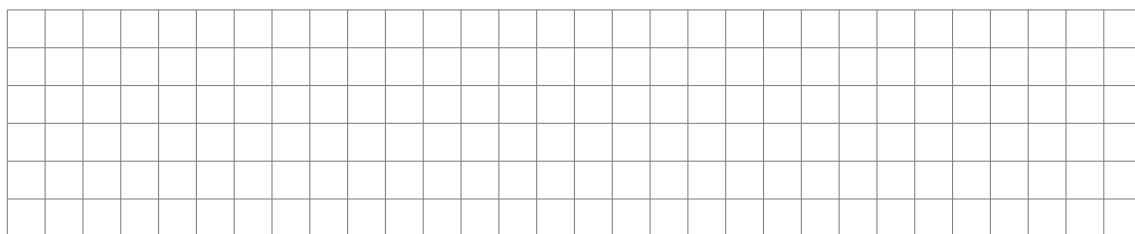
Donc la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

- De même, la famille infinie $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Méthode 2.12. Je dois savoir trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel E : il suffit pour cela d'écrire E sous la forme $\text{Vect}(\dots)$ donc c'est exactement la même méthode que le point précédent.

Application 2.13. Considérons l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Trouver une famille génératrice de E .



Proposition 2.14. Si \mathcal{F} est une famille génératrice de E alors :

- pour tout $\vec{u} \in E$, (\mathcal{F}, \vec{u}) est aussi une famille génératrice de E
- si on change l'ordre des vecteurs de la famille \mathcal{F} alors la famille reste une famille génératrice de E
- si on multiplie un ou plusieurs vecteurs de \mathcal{F} par un scalaire non nul alors la nouvelle famille est aussi génératrice de E .

Exemple 2.15. $\text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 3))$

$= \text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 1))$ on multiplie le dernier vecteur par $\frac{1}{3}$

$= \text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 1))$ inutile de garder deux fois le même vecteur

$= \text{Vect}((1, 1), (3, 1), (1, 2))$ modification de l'ordre

$= \text{Vect}((1, 1), (3, 1), (1, 2), (4, 2))$ on peut ajouter dans la famille

n'importe quel vecteur combinaison linéaire des autres.

2.2.3 Familles libres

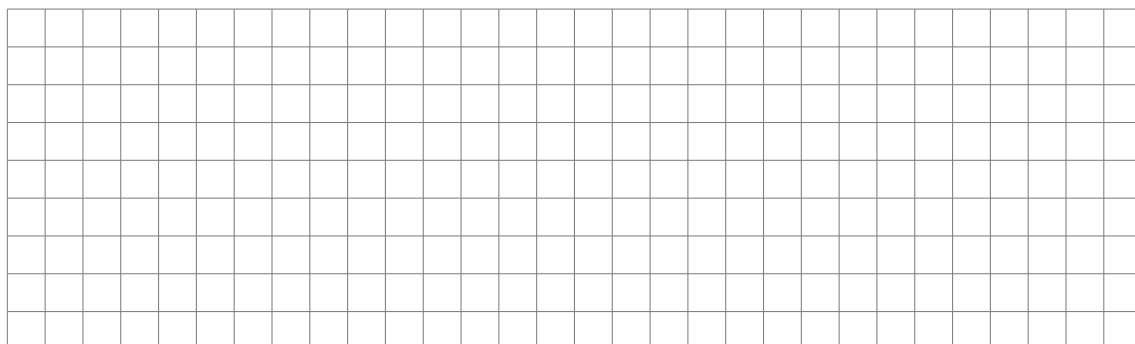
Définition 2.16. • Une famille finie $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ de vecteurs de E est dite **libre** si, et seulement si, pour tout p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ on a :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

- Une famille infinie $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **libre** si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Application 2.17. La famille $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathbb{R}[X]$?



Application 2.18. On considère la famille (f, g, h) composée de trois fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$f : x \mapsto \sin(x) \quad g : x \mapsto \cos(x) \quad h : x \mapsto \sin(2x)$$

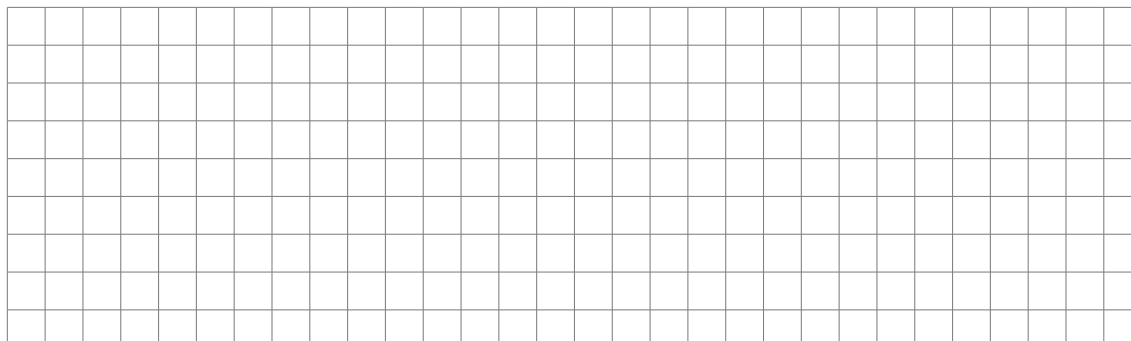
Montrer que cette famille est libre.



Application 2.19. On considère E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f_a(x) = |x - a|.$$

Montrer que la famille infinie $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.



Proposition 2.20. Soit E un espace vectoriel.

- Si on change l'ordre des vecteurs d'une famille libre (resp. liée), on obtient encore une famille libre (resp. liée).
- Une famille contenant un seul vecteur est libre si, et seulement si, le vecteur est non nul.
- La famille (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est liée si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$ ou $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$. On dit alors que les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont **colinéaires**.
- Une famille contenant 3 vecteurs est libre si, et seulement si, les vecteurs ne sont pas coplanaires.
- Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
- Toute famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- Soit \mathcal{F} une famille libre de E et \vec{u} un vecteur de E . La famille (\mathcal{F}, \vec{u}) est liée si, et seulement si, \vec{u} est combinaison linéaire de la famille \mathcal{F} .

Il est aussi important de connaître cette propriété sur les familles de polynômes :

Proposition 2.21. Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une famille de polynômes non nuls tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) < \deg(P_{k+1}) \text{ (échelonnée en degrés).}$$

Alors cette famille est libre.

Exemple 2.22. On peut affirmer, sans démonstration, que la famille

$$\{1, X^5 + 2X^3, X^2 + 1, X^4\}$$

est libre car, en la réordonnant, on peut obtenir une famille de polynômes échelonnée en degrés.

3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

Définition 3.1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si :

- F est un sous-ensemble de E
- F est non vide
- pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs de F et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur de F

Proposition 3.2. Si F est un sous espace vectoriel de E alors F est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 3.3. Soit $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) de vecteurs de E . Alors le sous-espace engendré $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Méthode 3.4. Il faut savoir montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné ou classique. Il existe deux principales méthodes :

- utiliser la définition
- écrire l'ensemble sous la forme $\text{Vect}(\dots)$ et conclure grâce à la propriété précédente.

Application 3.5. Montrer, en utilisant les deux méthodes, que l'ensemble $E = \{aX^2 + 2aX + 3b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.



Méthode 3.6. Pour montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel classique.

Application 3.7. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.



Proposition 3.8. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Attention : ce n'est en général pas vrai pour la réunion de deux sous-espaces.

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition

4.1.1 Base

Définition 4.1. On appelle **base** de E toute famille à la fois libre et génératrice de E .

Par conséquent, la famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E peut s'écrire, de manière unique, comme une combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$.

Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les **coordonnées du vecteur** dans la base $(\vec{u}_i)_{i \in I}$.

Définition 4.2. Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E . Soit $\vec{u} \in E$, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coordonnées de \vec{u} dans la base

\mathcal{B} . $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée la **matrice colonne des coordonnées** de \vec{u} dans la base \mathcal{B} .

Méthode 4.3. Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Pour trouver les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ il faut trouver les réels $(a_i)_{i \in I}$ tels que :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} a_i \vec{e}_i$$



Proposition 4.8. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice inversible et :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Proposition 4.9. On considère \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de l'espace vectoriel E et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Pour tout $\vec{u} \in E$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{u})$$

Dans certains des espaces vectoriels classiques certaines bases sont à connaître par coeurs. Ce sont des bases dites **canoniques**.

Théorème 4.10. Bases canoniques Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ i ème place. La famille (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n .
- Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne qui vaut 1. La famille $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots, E_{2p}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{np})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_i(X) = X^i$. La famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- La famille infinie $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Sur l'ensemble des polynômes on possède aussi cette propriété qui permet d'éviter quelques calculs :

Proposition 4.11. Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls tels que $\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) = k$. Alors $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 4.12. La famille $\left((X-2)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

4.1.2 Dimension

Définition 4.13. On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie.

Théorème 4.14. Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base.

Théorème 4.15. Soit E un espace de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé **dimension de l'espace vectoriel** E et est noté $\dim(E)$. Par convention on dira que l'espace $\{0\}$ est de dimension 0.

Théorème 4.16. Dimensions des espaces vectoriels de référence

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Proposition 4.17. Soit E un espace de dimension finie n :

- Toute famille libre (resp. génératrice) de n vecteurs est une base de E
- Toute famille libre possède au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

Conséquence : Dans un espace de dimension n , toute famille de strictement plus de n vecteurs est donc forcément liée et toute famille de strictement moins de n vecteurs n'est jamais génératrice.

Théorème 4.18. Théorème de la base incomplète.

Soit E un espace de dimension finie n et (e_1, \dots, e_k) une famille libre de E . Alors il existe des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_n tels que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Théorème 4.19. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E . Alors F est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus :

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$$

Application 4.20. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \text{Vect}(3, X - 1, (X - 4)^2)$. Démontrer que $E = F$.

Définition 4.21. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle **rang** de cette famille, et on note $\text{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, la dimension de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Méthode 4.22. Montrer qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel.

On dispose de deux méthodes :

- **Méthode 1** : s'applique lorsqu'on ne connaît pas la dimension de E
On montre que la famille \mathcal{B} est libre et génératrice de E .
- **Méthode 2** : elle s'applique lorsqu'on connaît la dimension de E .
On montre que \mathcal{B} est une famille libre (ou génératrice) de E puis on dit : " la famille \mathcal{B} est une famille libre (resp. génératrice) telle que $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$ donc \mathcal{B} est une base de E ."

Application 4.23. Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

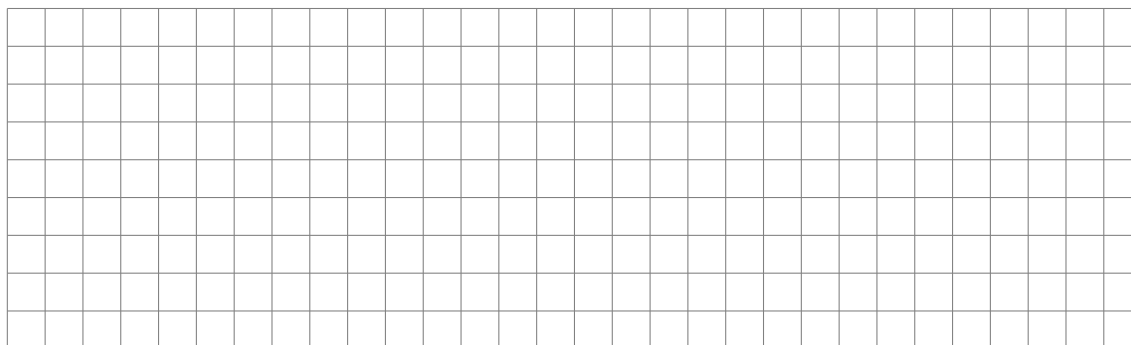


Méthode 4.24. Trouver une base d'un espace vectoriel donné.

On commence par trouver une famille génératrice de E (voir méthode sur les familles génératrices), puis on montre que cette famille est libre. Enfin on conclut.

Application 4.25. Déterminer une base de l'espace-vectoriel

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

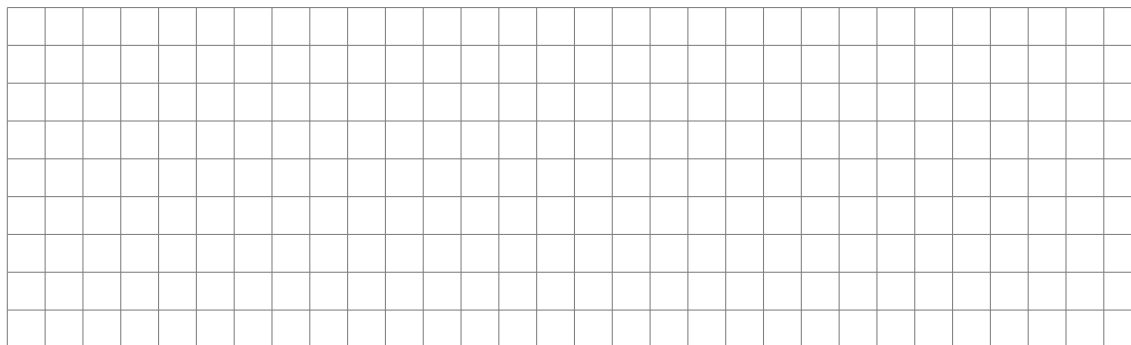


Méthode 4.26. Calculer la dimension d'un espace vectoriel donné.

- S'il s'agit d'un espace vectoriel classique, on utilise les résultats du cours
- S'il s'agit d'un nouvel espace vectoriel défini dans l'énoncé de votre exercice alors LA SEULE MÉTHODE possible consiste à trouver une base puis compter le nombre de vecteurs dans la base. Ce nombre est la dimension cherchée.

Application 4.27. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}.$$



Méthode 4.28. Calculer le rang d'une famille de vecteurs

Il faut poser $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et calculer la dimension de F .

Application 4.29. On pose $P = 2X + 1$, $Q = X^2 + 1$ et $R = 2X^2 + 2X + 3$
Quel est le rang de la famille (P, Q, R) de $\mathbb{R}[X]$?



5 Somme de sous-espaces vectoriels

5.1 Deux sous-espaces vectoriels

5.1.1 En dimension quelconque

Définition 5.1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . L'ensemble $\{\vec{f} + \vec{g}, (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* de F et G et noté $F + G$

Définition 5.2. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont en *somme directe* si tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . On notera alors $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Proposition 5.3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 5.4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si, et seulement si, tout vecteur \vec{u} de E s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $(\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$. On dit alors que E est somme directe de F et G , et on note :

$$E = F \oplus G.$$

Proposition 5.5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires dans E ;
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$.

Application 5.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.



Application 5.7. On considère \mathcal{F} l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et I le sous-espace vectoriel des fonctions impaires et P le sous-espace vectoriel des fonctions paires. Montrer que P et I sont supplémentaires dans \mathcal{F} .



5.1.2 En dimension finie

On se place dans un espace E de dimension finie.

Théorème 5.8. Formule de Grassman

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Grâce à cette formule on dispose, en dimension finie, de méthodes supplémentaires pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :

Proposition 5.9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires ;
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$;
3. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;
4. $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition 5.10. • Si (e_1, \dots, e_k) est une base de F et (f_1, \dots, f_p) est une base de G et que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E alors la famille $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p)$ est une base de E . On dit que c'est une **base adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

- Si (u_1, \dots, u_n) est une base de E alors

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \text{ et } G = \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

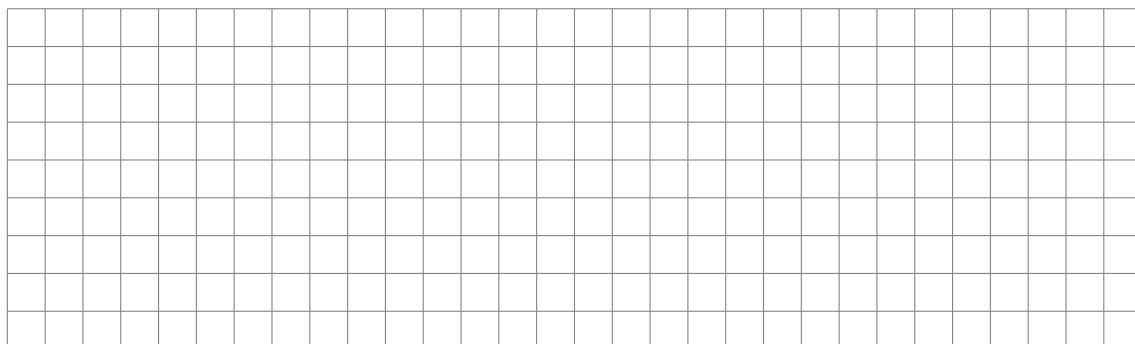
sont supplémentaires.

Application 5.11. On se place dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 et on considère les deux sous-espaces vectoriels suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.



5.2 Plusieurs sous-espaces vectoriels

Définition 5.12. Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme** des sous-espaces (F_1, \dots, F_p) le sous-espace vectoriel :

$$F = \sum_{i=1}^p F_i = F_1 + \dots + F_p = \left\{ \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_p / \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \vec{f}_i \in F_i \right\}$$

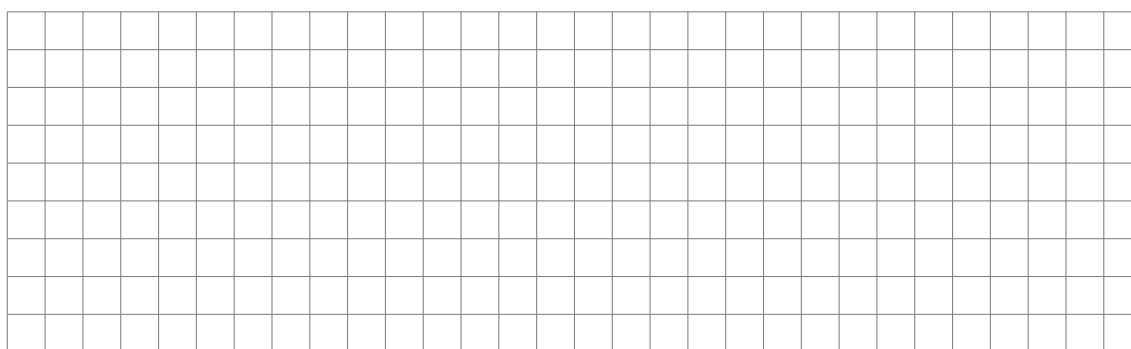
Définition 5.13. On dit que la somme $F = F_1 + \dots + F_p$ est **directe** si tout vecteur de F se décompose de manière unique comme somme de vecteurs de $(F_i)_{i=1, \dots, p}$. On notera alors $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Proposition 5.14. La somme $F = \sum_{i=1}^p F_i$ est directe si, et seulement si,

pour $\vec{f}_1 \in F_1, \vec{f}_2 \in F_2, \dots, \vec{f}_p \in F_p$ on a :

$$\vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_p = \vec{0} \iff \vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \dots = \vec{f}_p = \vec{0}$$

Application 5.15. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et on fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on pose $F_k = \text{Vect}(X^k(X-1))$. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_1, F_2, \dots, F_p sont en somme directe.



Proposition 5.16. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

On dit que la famille $(F_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ est une **décomposition en somme directe** de E .

De plus si, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on considère \mathcal{B}_i une base de F_i , alors la réunion des bases \mathcal{B}_i est une base de E . On dit que c'est une **base adaptée à la décomposition en somme directe**.

6 Hyperplans

Dans toute cette partie E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ finie.

Définition 6.1. On dit qu'un sous-espace vectoriel de E est un **hyperplan** de E si, et seulement s'il est de dimension $n - 1$.

Proposition 6.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

F est un hyperplan de E si, et seulement s'il admet une droite vectorielle comme supplémentaire autrement dit, s'il existe $\vec{u} \in E, \vec{u} \neq \vec{0}$ tel que :

$$E = F \oplus \text{Vect}(\vec{u}).$$

Théorème 6.3. Équation d'un hyperplan.

Soit F un hyperplan de E et \mathcal{B} une base de E . Alors il existe des scalaires a_1, \dots, a_n non tous nuls tels que :

$$\vec{x} \in F \iff a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de \vec{x} dans la base \mathcal{B} . La relation

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

s'appelle *l'équation de l'hyperplan F* dans la base \mathcal{B} .

Remarque 6.4. Lorsque la base \mathcal{B} est fixé, les scalaires a_1, \dots, a_n ne sont pas uniques mais ils sont définis à une constante multiplicative près.

Application 6.5. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) + P'(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ et en donner une équation.

