Programme de khôlle 3

Semaine du 25 septembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques des espaces considérés :

1. $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2\right)$ définie par :
$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(3x_1 - 4x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3\right)$$
2. $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ définie par $f(P) = (X+2)P' - 2P$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. On considère $f \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right)$ définie par :
$$f(M) = AM - MA.$$
On cherchera la matrice de f dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par*
$$u(P) = P + (1-X)P'.$$

1. *Montrer que u est un endomorphisme de E.*
2. *Déterminer une base de Im(u).*
3. *Déterminer une base de* $\ker(u)$.
4. *Montrer que* $\ker(u)$ *et* Im(u) *sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.*

Exercice 2.2. *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose*

$$f(P) = \left(X^2+1\right) P'' - XP' - 3P$$

1. *Montrer en détail que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Montrer que $F = \mathbb{R}_3[X]$ est stable par f. Cela signifie que $f(F) \subset F$, ou encore que pour tout $P \in F$, on a $f(P) \in F$*
3. *On note g la restriction de f à F ; c'est donc un endomorphisme de F. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de F.*
4. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}(g)$.
5. *Montrer que* $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.3. *Soient $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ les vecteurs de $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.*
Posons $u_1 = (1,4)$ et $u_2 = (1,3)$.

1. *Montrer que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ notée $\mathscr{B}'$.*

   Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:
   $$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$$
2. *Préciser les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Préciser $f^2 = f \circ f$.*
3. *Préciser $f(u_1)$ et $f(u_2)$. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}'$.*
4. *Préciser les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.*
5. *Quelles sont les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) ?*
6. *Retrouver la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ en utilisant ces matrices de passage.*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

1 Rappels et compléments sur les matrices
2 Généralités sur les espaces vectoriels
3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels
4 Dimension d'un espace vectoriel
5 Somme de sous-espaces vectoriels
6 Hyperplans

Chap.2 : Applications linéaires

1 Définitions
2 Noyau et image
3 Représentation matricielle
4 Sous-espaces stables par un endomorphisme