# Exercices
# Chap.5 : Séries numériques

## 1 Nature et somme d'une série

**Exercice 1.1.** *En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.*

1. $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ *avec* $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
2. $\sum e^{-3n}$
3. $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ *avec* $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$
4. $\sum n(n+1)$
5. $\sum\limits_{n\geq 2} w_n$ *avec :*
$$w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$
6. $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$
7. $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

**Exercice 1.2.**
1. *Trouver trois réels* $a, b$ *et* $c$ *tels que :*
$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+3}.$$
2. *En déduire la valeur de* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. *En déduire la nature et la somme de la série :* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.
4. *Sur le même modèle déterminer la nature et la somme de* $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.

**Exercice 1.3.** ***Utilisation des critères de convergence***
*Déterminer la nature des séries suivantes (on pourra faire appel à toutes les techniques du chapitre...) :*

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
2. $\sum\limits_{n\geq 1} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$
4. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
5. $\sum (-1)^n n e^{-n}$
6. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2+\ln(n)}$
7. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!n^n}{(2n)!}$
8. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
9. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$
10. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}\cos(n)+(-1)^n\ln(n)}{n^2}$
11. $\sum \frac{(-1)^n}{2n+3}$

**Exercice 1.4.** 1. *Montrer que* $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)}$.

2. *En déduire la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

**Exercice 1.5.** *A l'aide des développement limités déterminer un équivalent simple (de la forme* $\frac{1}{n^\alpha}$*) de chacun des termes généraux des séries suivantes puis déterminer la nature des séries :*

1. $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *avec* $u_n = 3\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln\left(n^3+1\right)$
2. $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ *avec* $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$;
3. $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ *avec* $w_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

## 2 Critère spécial des séries alternées

**Exercice 2.1.** 1. *Montrer que la série :*

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$

*est convergente.*

2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

3. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}$$

4. *En déduire que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

5. *Donner une valeur approchée de* $\ln 2$ *à la précision* $10^{-3}$.

## 3 Exercices complets

**Exercice 3.1.** *On pose, pour tout* $n$ *entier* $\geqslant 1$ *:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad ; \quad a_n = S_n - \ln(n) \quad ; \quad b_n = S_n - \ln(n+1)$$

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$. ***Indication :*** *penser à l'inégalité des accroissements finis.*
2. (a) *Montrer que les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont adjacentes. On note* $\gamma$ *leur limite commune. (* $\gamma$ *s'appelle la constante d'Euler)*
   (b) *Montrer que* $\gamma > 0$.
3. *En déduire que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ *lorsque* $n \to +\infty$.

   *Cette égalité s'appelle le* ***développement asymptotique de la série harmonique****.*

**Exercice 3.2.** *Soit* $a > 0$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ *et pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. *Donner la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$.
2. *En déduire que la suite* $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ *est convergente.*
3. *Justifier qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n} \qquad \textbf{\textit{Formule de Stirling}}$$

**Exercice 3.3.** *Soit* $\lambda > 0$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$: \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \tfrac{(-1)^n}{\lambda n+1}.$$

1. *La série* $\sum u_n$ *est-elle absolument convergente ?*
2. *Vérifier que pour tout entier* $n, u_n = (-1)^n \int_0^1 t^{\lambda n}\, \mathrm{d}t$.
3. (a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda} + r_n$ *en précisant la valeur de* $r_n$.
   (b) *En utilisant le fait que* $\frac{t^{\lambda(n+1)}}{1+t^\lambda} \leqslant t^{\lambda(n+1)}$ *pour tout* $t \in [0;1]$, *montrer que* $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.
   (c) *En déduire que la série* $\sum u_n$ *est convergente et que l'on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \tfrac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda}.$$

4. *En déduire les valeurs de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

# 4 Pour aller plus loin...

**Exercice 4.1.** *On considère une série* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. *Pour* $\beta \in \mathbb{R}$ *fixé, on pose :* $v_n = \ln\Big((n+1)^\beta u_{n+1}\Big) - \ln\Big(n^\beta u_n\Big)$.
   *Donner les valeurs de* $\beta$ *telles que la série* $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ *converge.*
2. *En déduire qu'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^\alpha$.
3. *Donner la nature de* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *en fonction de la valeur de* $\alpha$.

   *Il s'agit du* ***critère de Raabe-Duhamel.***