Pour le 1er octobre 2021
Devoir-Maison 4

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$.

1. Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels f est continue.
2. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.
   Indication : on pourra faire une intégration par parties sur le segment $[1; x]$ avec $x > 1$.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que
   $$\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{t\,(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$
4. En déduire que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
5. Pouvait-on prévoir dès le début que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge ?
   Indication : on pourra utiliser un équivalent de f en $+\infty$.
6. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
7. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.