AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

ED 184 MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

I2M - Institut de Mathématiques de Marseille

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques

Jean-Marie CABRERA

Modules de Fredholm finiment sommables sur les groupes hyperboliques

Finitely summable Fredholm modules over hyperbolic groups

Soutenue le 14/03/2019 devant le jury composé de :

Mikael DE LA SALLE	E.N.S. Lyon	Rapporteur
Pierre JULG	Université d'Orléans	Rapporteur
Moulay-Tahar BENAMEUR	Université de Montpellier	Examinateur
Luisa PAOLUZZI	Aix-Marseille Université	Examinateur
Christophe PITTET	Aix-Marseille Université	Examinateur
Georges SKANDALIS	Université Paris VII	Examinateur
Michael PUSCHNIGG	Aix-Marseille Université	Directeur de thèse

Numéro national de thèse/suffixe local : 2019AIXM0059/005ED184

RESUME

Le présent travail est une contribution à la K-théorie bivariante des C*-algèbres au sens de Kasparov, et en particulier à sa version équivariante. Un rôle clé dans cette théorie est joué par l'élément γ de Kasparov, une sorte de classe fondamentale équivariante d'un groupe localement compact. On se propose de représenter cette classe par des K-cycles (modules de Fredholm) possédant de bonnes propriétés.

Dans cette thèse, on donne une nouvelle construction de tels K-cycles pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov. Les modules de Fredholm obtenus sont finiment sommables, i.e. ils possèdent une propriété de régularité particulièrement forte. On donne aussi une majoration de leur degré minimal de sommabilité.

On s'inspire des travaux de V. Lafforgue : les K-cycles considérés sont similaires à ceux utilisés par V. Lafforgue dans sa démonstration de la Conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes hyperboliques. Leur construction est basée sur les idées de Mineyev sur les "bicombings homologiques" des groupes hyperboliques et procède par récurrence sur les squelettes d'un complexe de Rips associé au groupe.

Une preuve non-constructive de la sommabilité finie d'un élément γ a été obtenue par Emerson et Nica pour les groupes hyperboliques à caractéristique d'Euler-Poincaré zéro. Des constructions explicites de K-cycles représentant l'élément γ d'un groupe hyperbolique ont été données par Kasparov-Skandalis et V. Lafforgue, mais on ne sait pas si leurs modules sont finiment sommables. En général, on ne peut pas espérer trouver des éléments "gamma" finiment sommables pour d'autres classes de groupes discrets.

ABSTRACT

This work is a contribution to the bivariant K-theory of C*-algebras in the sense of Kasparov and in particular to its equivariant version. In this theory, a key role is played by Kasparov's "gamma"-element, a kind of equivariant fundamental equivariant class for a locally compact group. It is of interest to find particularly well behaved K-cycles (Fredholm modules) representing this class.

We present a new construction of K-cycles representing a "gamma"-element for hyperbolic groups in the sens of Gromov. The Fredholm modules obtained are finitely summable i.e. they possess particularly strong regularity properties. We also obtain an upper bound of their minimal degree of summability.

Our approach is inspired by the work of V. Lafforgue : the K-cycles under consideration are similar to those used by Lafforgue in his demonstration of Baum-Connes conjecture with coefficients for hyperbolic groups. Their construction is based on Mineyev's ideas on homological bicombings and proceeds by induction over the skeleta of a Rips complex associated to the group.

A non-constructive proof of the finite summablity of a "gamma" element was obtained by Emerson and Nica for the hyperbolic groups of Euler-Poincaré characteristic zero. Explicit constructions of K-cycles representing the "gamma"- element of hyperbolic groups were given by Kasparov-Skandalis and V. Lafforgue, but it is not known whether their modules are finitely summable. In general one cannot hope to find finitely summable "gamma" elements for other classes of discrete groups.

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Michael PUSCHNIGG, pour m'avoir guidé avec patience, disponibilité et gentillesse tout au long de la rédaction de ce travail. Reprendre mes études n'a pas été chose facile, c'est grâce à la confiance qu'il m'a accordée que j'ai eu la force de mener à bien ces cinq années de recherche.

M. Mikael DE LA SALLE et M. Pierre JULG m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de ma thèse. Ils ont pris le temps de lire mon travail, j'en suis très honoré et je les en remercie.
Je tiens à remercier Mme Luisa PAOLUZZI qui m'a soutenu lors de la reprise de mes études, il y a six ans en Master 2, M. Moulay-Tahar BENAMEUR, M. Christophe PITTET et M. Georges SKANDALIS d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je tiens à remercier M. Charles TOROSSIAN, Inspecteur Général de mathématiques, qui m'a fait l'honneur de sa confiance et de son soutien alors que ma thèse n'était pas encore terminée. Merci également à M. Johan YEBBOU, Inspecteur Général de mathématiques, qui a permis la concrétisation de mon projet professionnel.

Mes remerciements vont aussi à mes amis qui, avec cette question récurrente, « quand est-ce que tu la soutiens cette thèse ? », bien qu'angoissante en période de doutes, m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final. Merci à Valérie CALANDRA, professeur de Lettres Classiques, qui a relu intégralement mon texte, corrigeant fautes d'orthographe, d'accords et erreurs de "parenthésage" ! Sans son soutien de toujours, je ne serais jamais parvenu jusque là.

Merci à mes parents. Sans leurs sacrifices pour m'assurer une éducation, je ne serais jamais parvenu à gravir les différents échelons qui ont ponctué mon parcours professionnel. C'est grâce à eux, à qui la vie n'a pas donné la chance de poursuivre des études, que j'ai pu utiliser le fameux ascenseur social.

Enfin, un MERCI affectueux à Mme Jeanne BERARD, mon professeur de mathématiques du collège qui a su me donner le goût de la rigueur et l'amour de la discipline.

Table des matières

INTRODUCTION

Les groupes hyperboliques constituent une classe particulièrement intéressante de groupes discrets finiment engendrés. La caractéristique de groupes hyperboliques est le caractère $\delta-$ fin des triangles dans les graphe de Cayley $\mathscr{G}(\Gamma, S)$, où la constante d'hyperbolicité δ ne dépend que de Γ et du système générateur S de Γ choisi.
Plusieurs conjectures, qui restent pour la plupart ouvertes, ont été démontrées sur les groupes hyperboliques. Parmi elles, la version forte de la conjecture de Novikov par Kasparov ([Ka]), la conjecture de Baum-Connes, ainsi que la conjecture de Baum Connes à coefficients ([Laf]) sont maintenant établies.

Un point clef dans la preuve de chacune des trois conjectures citées est la construction d'un module de Fredholm

$$\varepsilon = (\mathscr{H}, \pi, F)$$

sur la C^*- algèbre réduite, notée $C_r^*(\Gamma)$, sur le groupe hyperbolique. Ce dernier représente l'élément "gamma" :

$$\gamma \in KK_\Gamma(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

dans la $K-$ théorie bivariante équivariante de Kasparov.
Pour rappel, un module de Fredholm sur $C_r^*(\Gamma)$ est la donnée d'une représentation unitaire paire de Γ sur un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué, et d'un opérateur linéaire borné impair F sur $\mathscr{H}$ dont l'image dans l'algèbre de Calkin $\mathscr{L}(\mathscr{H})/\mathscr{K}(\mathscr{H})$ est unitaire, auto-adjointe et commute avec $\pi(\Gamma)$.
L'ensemble des classes d'homotopie de tels bimodules forme le $K-$groupe bivariant $\Gamma-$équivariant de Kasparov en question.

Aucun des modules précédemment construits n'est réputé posséder la propriété de sommabilité finie, qui exige que les conditions précédentes soient déjà valables modulo un idéal de Schatten $\ell^p(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$. Cela représente une forte condition de régularité qui permet, notamment, de calculer l'indice de ces modules grâce à des formules d'indices particulièrement simples ([Co]).
Dans cette thèse, nous proposons une construction explicite d'un module de Fredholm finiment sommable sur $C_r^*(\Gamma)$ qui représente aussi bien la classe de l'élément "gamma" de Kasparov-Skandalis ([KS2]), que celui de Lafforgue ([Laf]). De plus, nous majorons le degré minimal de sommabilité par une constante explicite déterminée par la géométrie du graphe de Cayley.

Nos principales sources d'inspiration sont d'une part la preuve établie par Lafforgue de la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes hyperboliques ([Laf]) et d'autre part le travail de Mineyev et al. sur les bicombings homologiques pour les groupes hyperboliques ([MMS]).
Lafforgue construit explicitement des $K-$ cycles qui représentent l'élément "gamma" réduit. Ils sont de la forme :

$$\varepsilon_\gamma = (\ell^2(\Delta_*^R(\Gamma), \pi_{reg}, e^{d_x^{Laff}} \circ (\partial + h_x^{Laff}) \circ e^{-d_x^{Laff}})$$

pour R et t suffisamment grands. Dans cette expression, $\Delta_*^R(\Gamma)$ désigne le complexe de Rips, le sous complexe simplicial du complexe de Bar de Γ constitué des simplexes de diamètre au plus R. Il contient le graphe de Cayley de (Γ, S) dans son $1-$ squelette, et il est contractile pour R suffisamment grand. Par conséquent, il peut servir de modèle pour un $\Gamma-$ espace propre universel.
Γ agit par translation à gauche sur le complexe de Rips et donne lieu à une représentation unitaire π_{reg} sur l'espace de Hilbert ℓ^2 associé. Les opérateurs ∂ et h_x^{Laff} désignent respectivement l'opérateur de bord et une homotopie de chaîne contractante du complexe de chaînes $C_*^R(\Gamma, \mathbb{C})$ associé au complexe de Rips. Enfin, d_x^{Laff} désigne l'opérateur de multiplication avec la distance à un sommet de base du complexe de Rips, pour une distance d^{Laff} (particulièrement bien choisie) qui est "continue" et quasi-isométrique à la métrique des mots sur (Γ, S).

Les bimodules de Lafforgue dépendent de deux données qui peuvent être modifiées : le choix de l'homotopie contractante du complexe de Rips ainsi que celui de la métrique continue, quasi-isométrique à la métrique des mots. Par rapport aux choix de Lafforgue, nous allons simplifier ces deux données, en utilisant le bicombing homologique de Mineyev pour les groupes hyperboliques.

Il existe une homotopie contractante canonique d'un espace hyperbolique réel muni d'un point de base $x \in \Gamma$: elle envoie tout point $y \in \Gamma$ au point de base x le long du segment géodésique joignant x et y. Par ailleurs, dans un triangle géodésique d'un espace hyperbolique, un angle décroit exponentiellement avec la distance à son côté opposé. Cela implique la sommabilité finie de l'élément "gamma" pour des groupes d'isométries de l'espace hyperbolique ([Co]).

Pour un groupe hyperbolique abstrait, les chemins géodésiques doivent être remplacés par le bicombing homologique de Mineyev. A un sommet donné y du graphe de Cayley, Mineyev associe une combinaison convexe de segments géodésiques de longueur donnée (10δ par exemple) joignant y et des sommets situés entre y et l'origine x. Si l'origine est modifiée, la norme de la différence de ces combinaisons convexes dans $\ell^1(\mathscr{G}(\Gamma, S))$ décroît exponentiellement avec la distance à un segment joignant les deux origines. Une itération du procédé de construction de Mineyev conduit au bicombing recherché : cela fournit les termes en degré 0 d'une "bonne" homotopie de chaîne contractante du complexe de Rips.

Nous utilisons ce bicombing comme point de départ de la construction d'une homotopie contractante du complexe de Rips tout entier, par récurrence sur les squelettes. Supposons qu'une telle contraction, nommée h_*, a été construite sur le $(n-1)-$ squelette. Pour un $n-$ simplexe α, la chaîne $\alpha' = \alpha - h_{n-1}(\partial\alpha)$, où $\partial\alpha$ est le bord de α, est un cycle et $h_n(\alpha)$ sera un remplissage particulier de ce dernier, c'est-à-dire :

$$\partial(h_n(\alpha)) = \alpha - h_{n-1}(\partial\alpha)$$

Le remplissage de α' est contrôlé à l'aide d'une famille de segments géodésiques de Mineyev rattachés au sommet de base x_0 de α. Ces derniers se situent dans une couronne de largeur fixée (10δ par exemple) centrée en l'origine choisie et dont la frontière extérieure contient le sommet de base x_0. L'application identité du complexe de Rips de la couronne est canoniquement homotope à une combinaison convexe de projections orthogonales sur les segments de Mineyev.
Remplir un cycle situé dans cette couronne revient donc à remplir un cycle sur un segment, ce qui peut être réalisé canoniquement.
Cette procédure est d'abord réalisée sur la partie de α' située dans la couronne. Par récurrence on obtient le remplissage de α' tout entier.
Par ce procédé, la "presque indépendance" des bicombings de Mineyev par rapport au choix de l'origine conduit à une "presque indépendance" de l'homotopie contractante h_*^x construite par rapport à cette même origine. Cela constitue le premier résultat principal de cette thèse.

Cependant, aucune des homotopies de chaînes précédemment construites ne se prolonge à $\ell^2(\Delta_*^R(\Gamma))$. La conjugaison par des opérateurs $e^{t\hat{d}_x}$, pour $t >> 0$ permettra d'obtenir de nouveaux opérateurs F_t dont les coefficients de matrice sont à décroissance exponentielle par rapport à la distance de la diagonale, ce qui les rendra bornés.
La sommabilité finie des commutateurs $[F_t, \pi_{reg}(g)]\,, g \in \Gamma$ provient d'une part de la presque "indépendance" par rapport au point de base de l'homotopie contractante ; et d'autre part d'un choix judicieux de la métrique

auxiliaire $\hat{d}$ (quasi-isométrique à la métrique des mots). Cette dernière, devra vérifier la forte condition d'uniforme continuité et de décroissante exponentielle suivante :

$$\sup_{x,y\in\Gamma} \sup_{x',y',d(x,x')=d(y,y')} e^{d(x,y)} \mid \hat{d}(x,y) - \hat{d}(x',y) - \hat{d}(x,y') + \hat{d}(x',y') \mid < +\infty$$

Cette condition sera vérifiée par la distance de Mineyev-Yu, d_x^{MY}, construite à partir du bicombing de Mineyev-Yu.

Une estimation élémentaire des coefficients de matrice montrera ensuite que les triplets :

$$\varepsilon'_\gamma = (\ell^2(\Delta_*^R(\Gamma)), \pi_{reg}, e^{td_x^{MY}}(\partial + h_*^x)e^{-td_x^{MY}})$$

définissent des modules de Fredholm qui représentent l'élément "Gamma" réduit de Kasparov-Skandalis et Lafforgue pour $R \geq 12\delta$ et pour tout $t > 20\delta ln(\mid S \mid)$.
On peut montrer qu'il est en plus finiment sommable et que son degré minimal de sommabilité satisfait la majoration $p \leq 18000\delta^3 \cdot \mid S \mid^{14\delta+1}$, qui ne dépend que de la constante d'hyperbolicité et de la cardinalité du système de générateurs du groupe.

Dans certains cas, une meilleure majoration de p est connue. Emerson et Nica ([EmNi]) ont fourni une preuve très élégante de l'existence de modules de Fredholm finiment sommables sur la C^*- algèbre maximale d'un groupe hyperbolique qui représentent l'élément "gamma". Pour cela, ils utilisent la suite de Gysin en $K-$homologie qui relie l'action triviale à l'action de Γ sur son bord. Sous l'hypothèse que la caractéristique d'Euler-Poincarré du groupe est nulle, ils obtiennent la forte majoration $p \leq Max(visdim(\partial\Gamma), 2)$ où $visdim(\partial\Gamma)$ désigne la dimension de Hausdorff du bord de Γ par rapport à la métrique "visuelle".

Il est à noter que la sommabilité finie de l'élément "gamma" n'est réalisée que dans des cas assez exceptionnels. A cet égard, le comportement de réseaux de rang supérieur est très opposé à celui des groupes hyperboliques : tout module de Fredholm finiment sommable sur un tel réseau est homotope à l'élément nul ([Pu3]).

Les quatre premiers chapitres de cette thèse rappellent des notions de base sur la C^*- algèbre réduite d'un groupe, sur les groupes hyperboliques, sur les modules de Fredholm puis sur les complexes simpliciaux.
La nouvelle homotopie contractante est construite dans le chapitre 5.

Dans le chapitre 6, nous construisons les nouveaux modules de Fredholm et nous estimons les coefficients de matrice des opérateurs associés.
Enfin, dans le chapitre 7, on montre que les modules de Fredholm finiment sommables obtenus représentent la classe d'un élément "Gamma" réduit.

1 Quelques rappels sur les groupes

Les définitions et propriétés relatives aux groupes finiment engendrés, espaces métriques et actions de groupes sont détaillées dans [BH].

1.1 Graphe de Cayley associé à un groupe

Définition 1.1. *Soit un groupe discret G et $S = \{s_1, ..., s_n\}$ un système fini d'éléments générateurs.*
On dit que S est ***symétrique*** *s'il contient l'inverse de chacun de ses éléments.*
On définit une géométrie sur G :

1. *la* ***longueur*** *d'un élément $g \in G$, notée $l_S(g)$, est la plus petite longueur d'une suite $s_{i_1}, ..., s_{i_l}$ de générateurs telle que $g = s_{i_1}...s_{i_l}$*
2. *la* ***distance*** *entre deux éléments $g, h \in G$, notée $d_S(g, h)$, est la longueur de gh^{-1} :*
$$d_S(g, h) = l_S(g^{-1}h)$$

Proposition 1.2. *Soit e l'élément neutre de G, la mesure $l_S : G \to \mathbb{N}$ vérifie :*

1. $l_S(g) = 0 \Longleftrightarrow g = e$
2. $\forall g \in G, l_S(g^{-1}) = l_S(g)$
3. $\forall g, h \in G, l_S(gh) \leq l_S(g) + l_S(h)$

Proposition 1.3. *(G, d_S) est un espace métrique. La distance d_S est invariante par translation à gauche :*
$$\forall g, h, h' \in G, d_S(gh, gh') = d_S(h, h')$$

Remarque 1.4. *Cette distance dépend du système de générateurs choisi, ce qui peut représenter un inconvénient.*

Définition 1.5. *(Cf. [BH],Définition 8.14) On dit que deux espaces métriques (X, d) et (X', d') sont* ***quasi-isométriques*** *s'il existe des applications $f : X \to X'$ et $g : X' \to X$ ainsi que des constantes $\lambda > 0$ et $C \geq 0$ telles que :*

1. $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$ *pour tous* $x, y \in X$
2. $d'(g(x'), g(y')) \leq \lambda d(x', y') + C$ *pour tous* $x, y \in X'$
3. $d(g(f(x)), x) \leq C$ *pour tout* $x \in X$
4. $d'(f(g(x')), x') \leq C$ *pour tout* $x' \in X'$

Proposition 1.6. *Si S et S' sont deux systèmes finis de générateurs d'un groupe G alors (G, d_S) et (G, d_S) sont quasi-isométriques. Plus précisément, il existe $A, B > 0$ tels que :*

$$Ad_S \leq d_{S'} \leq Bd_S$$

Preuve : On définit B comme le maximum de la longueur $l_{S'}$ sur S et $\frac{1}{A}$ comme le maximum de la longueur l_S sur S'. $\square$

On peut donc associer à chaque groupe discret finiment engendré G un espace métrique bien défini à quasi-isométrie près : il s'agit de ce groupe muni de la distance d_S pour n'importe quel système fini symétrique de générateurs.

Définition 1.7. *Soit G un groupe discret et $S = \{s_1, ..., s_n\}$ un système générateur symétrique de G. Le* ***graphe de Cayley*** *de G par rapport à ce système générateur est le graphe, noté $\mathscr{G}(G, S)$, dont les sommets sont les éléments de G, avec une arête entre g et h si et seulement s'il existe $s_i \in S$ tel que $h = gs_i$ (c'est à dire : $d_S(g, h) = 1$ si $g \neq h$).*

Les translations à gauche de G sur lui-même permettent de définir une action de G sur $\mathscr{G}(G, S)$.
On peut définir une distance sur $\mathscr{G}(G, S)$ en considérant la borne inférieure des longueur des chemins qui joignent deux points donnés :

$$d_{\mathscr{G}(G,S)}(g, h) = d_S(g, h)$$

Pour une définition plus générale d'un graphe métrique associé à un groupe, on pourra se référer à [BH], paragraphe 1.9.

Exemple 1.8. *Graphe de Cayley défini par le groupe libre sur deux générateurs a, b et par $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$.*

A chaque sommet du graphe correspond un élément du groupe, un mot réduit. Les mots sont reliés par des arêtes.

Le sommet central correspond au mot vide. Les quatre sommets les plus proches du mot vide sont : a, b, a^{-1} et b^{-1}.

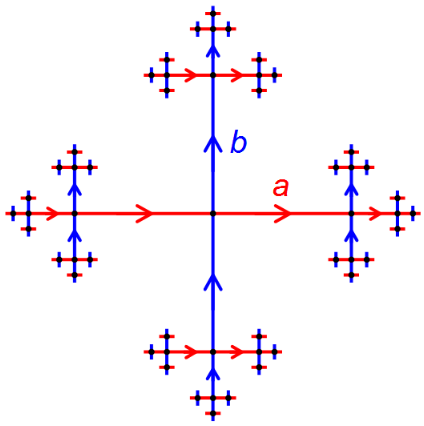

FIGURE 1 – Graphe de Cayley défini par le groupe libre sur deux générateurs a, b et par $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$.

Exemple 1.9.

FIGURE 2 – Graphe de Cayley défini par le groupe $\mathbb{Z}$ et par $S = \{-1; 1\}$.

1.2 Représentations unitaires d'un groupe

Les groupes sont aussi étudiés au travers de leurs représentations, qui en révèlent de façon indirecte des propriétés intrinsèques. Ainsi, les groupes topologiques se dévoilent notamment par l'intermédiaire de leurs actions unitaires vers des espaces de Hilbert.

Définition 1.10. *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable, l'ensemble des opérateurs bornés unitaires de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ constitue un groupe appelé le* ***groupe unitaire de $\mathscr{H}$****, nous le noterons $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.*

$$\mathscr{U}(\mathscr{H}) = \{U \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), U^*U = UU^* = I\}$$

Définition 1.11. *Soit G un groupe topologique. Une* ***représentation de G sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$*** *est un homomorphisme π du groupe G sur le groupe $GL_{cont}(\mathscr{H})$ des opérateurs linéaires bornés continus sur $\mathscr{H}$ tel que l'application $G \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ définie par $(g, x) \mapsto \pi(g)x$ est continue.*
Nous noterons $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ une représentation du groupe G.

On dit que $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ est une ***représentation unitaire*** *si $\pi(g) \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire :*

$$\forall v, w \in \mathscr{H}_\pi, \langle \pi(g)v | \pi(g)w \rangle = \langle v | w \rangle$$

Si la représentation est unitaire, on a donc en particulier $\pi(g)^* = \pi(g^{-1})$.

Proposition 1.12. *Une représentation π d'un groupe G sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est unitaire si et seulement si :*

$$\forall g \in G, \pi(g^{-1}) = \pi(g)^*$$

Proposition 1.13. *[De](page 129) Soit G un groupe localement compact. Considérons l'espace de Hilbert $L^2(G)$. L'application $L : G \to \mathscr{U}(L^2(G))$ telle que pour tout $g \in G$, l'application L_g définie par : $L_g : L^2(G) \to L^2(G)$ avec :*

$$\forall \varphi \in L^2(G), L_g(\varphi) : G \to G$$

et

$$\forall h \in G, L_g(\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$$

est appelée ***représentation régulière à gauche****.*

Preuve :
$Lx(\varphi)$ est unitaire car, par invariance à gauche de la mesure de Haar :

$< L_x\varphi, L_x\psi >= \int_G L_x\varphi(y)\overline{L_x\psi(y)}\,\mathrm{d}y$
$= \int_G \varphi(x^{-1}y)\overline{\psi(x^{-1}y)}\mathrm{d}y$
$= \int_G \varphi(y)\overline{\psi(y)}\mathrm{d}y$
$=< \varphi, \psi >$ □

1.3 C* algèbre maximale et C* algèbre réduite d'un groupe

Soit Γ un groupe discret. Nous allons lui associer deux C^*- algèbres.

Définition 1.14. *On définit la C^** ***algèbre maximale****, notée $C^*\Gamma$, comme le complété de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme :*

$$\left\| \sum_{g\in\Gamma} a_g g \right\| = \sup_{(\pi,\mathscr{H})} \left\| \sum_{g\in\Gamma} a_g \pi(g) \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}$$

où le sup est pris sur l'ensemble de toutes les représentations unitaires $(\pi, \mathscr{H})$ de Γ.

Posons $\ell^2(\Gamma) = \left\{ f : \Gamma \to \mathbb{C}, \sum_{g\in\Gamma} \mid f(g) \mid^2 < \infty \right\}$ l'ensemble des suites indexées par Γ de carré sommable.

Muni du produit scalaire :

$$\langle \sum_{g\in\Gamma} a_g g, \sum_{g\in\Gamma} b_g g \rangle = \sum_{g\in\Gamma} \overline{a_g} b_g$$

$\ell^2(\Gamma)$ est un espace de Hilbert.
La **représentation régulière à gauche** de Γ sur $\ell^2(\Gamma)$ est le morphisme de groupe $\pi_{reg} : \Gamma \to \mathscr{U}(\ell^2(\Gamma))$ défini par :

$$\text{si } f \in \ell^2(\Gamma) \text{ alors } \pi_{reg}(g)f(h) = f(g^{-1}h)$$

Soit $\mathscr{L}(\ell^2(\Gamma))$ la C^*-algèbre des opérateurs linéaires bornés

$$T : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$$

On définit alors $C_r^*(\Gamma)$, appelée C^* **algèbre réduite du groupe** Γ, comme l'adhérence dans $\mathscr{L}(\ell^2(G))$ de l'espace vectoriel engendré par l'image de Γ par sa représentation régulière à gauche.

$$C_r^*(\Gamma) = \overline{\pi_{reg}(\mathbb{C}\Gamma)} \subset \mathscr{L}(\ell^2(\Gamma))$$

où $\mathbb{C}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires formelles finies d'éléments de Γ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

2 Groupes hyperboliques

La notion de groupe hyperbolique a été introduite et développée par Mikhaïl Gromov au début des années 1980 dans son ouvrage [Grom].
Les différentes définitions et propriétés énumérées ci-dessous sont explicitées dans [GhHa].

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Soient x_0, x_1 deux points de X et $a = d(x_0, x_1)$. Un **segment géodésique** dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 est une isométrie $g : [0, a] \to X$ telle que $g(0) = x_0$ et $g(a) = x_1$.*

Définition 2.2. *On dit que* (X, d) *est un* ***espace géodésique*** *si, pour toute paire de points* $(x_0, x_1) \in X^2$ *il existe un segment géodésique d'extrémités* x_0 *et* x_1.

Exemple 2.3. *Il n'y a pas toujours unicité du segment géodésique. Par exemple, le graphe de Cayley* $\mathscr{G}(G, S)$ *(Cf Définition 1.7) d'un groupe* G *finiment engendré par* S *est un espace géodésique. Si* G *n'est pas engendré librement par* S *alors il existe un circuit qui contient des paires de points entre lesquels il existe plusieurs segments géodésiques.*

Définition 2.4. *Soit* $\delta \geq 0$ *un nombre réel. On dit qu'un espace métrique géodésique* X *est* $\delta-$***hyperbolique*** *si pour tout triangle x,y,z, on peut trouver un point c qui est à une distance moindre que* δ *de chacun des trois côtés du triangle x,y,z.*

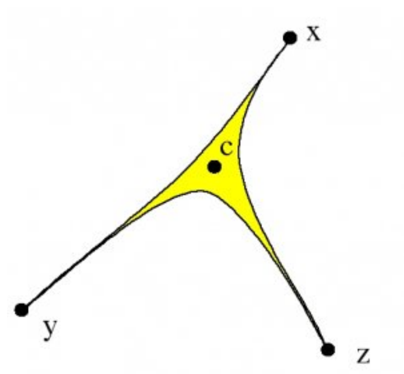

FIGURE 3 – La distance de c à chacun des côtés est inférieure à δ

Gromov fournit dans son ouvrage [Grom] plusieurs définitions équivalentes dont :

Définition 2.5. *On dit qu'un espace métrique* (X, d) *est* $\delta-$***hyperbolique*** *lorsqu'il existe une constante* $\delta \geq 0$ *telle que :*
$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X^4$:
$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4) \leq max\{d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3), d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)\} + 2\delta$

Proposition 2.6. ***Condition de Rips*** *: Un espace métrique* (X, d) *est* $\delta-$***hyperbolique*** *si et seulement si pour tout triplet* $(x, y, z) \in X^3$ *et tout choix de segments* $[x, y], [y, z], [x, z]$ *on a la propriété suivante :*
tout point de $[x, y]$ *est à une distance inférieure à* δ *de tout point de la réunion* $[y, z] \cup [z, x]$.
On exprime cette propriété en disant que les triangles de X *sont* $\delta-$*fins.*

Considérons un arbre T, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle et associons à chaque arête a de T un réel strictement positif $l(a)$. On peut alors munir T d'une métrique d qui en fait un espace métrique géodésique et pour laquelle chaque arête a est isométrique à l'intervalle $[0; l(a)]$ de $\mathbb{R}$; on parle alors d'**arbre métrique**.

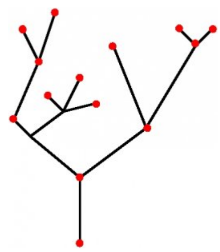

FIGURE 4 – Ceci est un arbre.

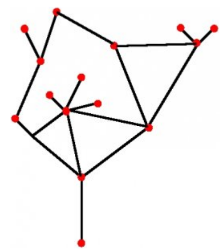

FIGURE 5 – Ceci n'est pas un arbre.

Dans un tel arbre métrique, deux points quelconques sont joints par un unique segment. Considérons quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 de T et les segments les joignant deux à deux.

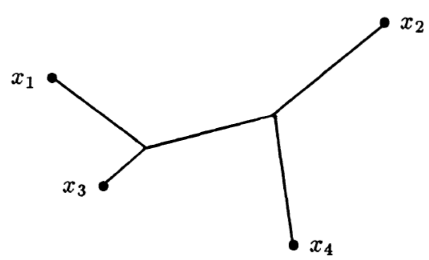

FIGURE 6 – Un arbre métrique est un espace métrique hyperbolique

On constate qu'à une renumérotation des indices près, on a :

$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4) = d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3)$$

Exemple 2.7. *En particulier, un arbre métrique est un espace métrique 0-hyperbolique.*

Lemme 2.8. *Si deux espaces métriques géodésiques sont quasi-isométriques et si l'un d'eux est hyperbolique alors il en est de même de l'autre.*

Preuve : [GhHa] Théorème 12 p. 88

Lemme 2.9. *Soit un espace métrique $\delta-$ hyperbolique et géodésique (X, d) Considérons $x, y, z \in X$. Choisissons trois segments $[x, y]\,, [y, z]$ et $[z, x]$. Alors il existe $w \in [y, z]$ tel que :*

$$d(w, [x, y]) \leq \delta \text{ et } d(w, [x, z]) \leq \delta$$

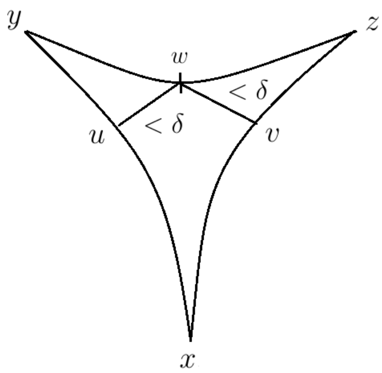

FIGURE 7

Preuve :

Par hyperbolicité, tout point d'une géodésique de y à z est à distance inférieure à δ de $[y, x] \cup [x, z]$. On a donc :

$$[y, z] \subset U_y \cup U_z$$

où :

1. $U_y = \{v \in X, d(v, [x, y] < \delta\}$
2. $U_z = \{v \in X, d(v, [x, z] < \delta\}$

Posons $U'_y = U_y \cap [y, z]$ et $U'_z = U_z \cap [y, z]$. Alors U'_y et U'_z sont deux ouverts non vides (car $y \in U'_y$ et $z \in U'_z$) de $[y, z]$.
Or $[y, z]$ est connexe donc $U'_y \cap U'_z \neq \emptyset$.
Soit donc $w \in U_y \cap U_z \cap [y, z]$.
Ainsi il existe $u \in [x, y]$ et $v \in [x, z]$ tels que :

$$d(w,u) < \delta \text{ et } d(w,v) < \delta \ \square$$

Proposition 2.10. *Soit un espace métrique géodésique et $\delta-$ hyperbolique X. On se donne trois éléments $x, y, p \in X$ et on suppose qu'il existe deux géodésiques $[x, y]$ et $[x, y]'$ de x à y. Alors :*

$$d(p, [x, y]) - \delta \leq d(p, [x, y]') \leq d(p, [x, y]) + \delta$$

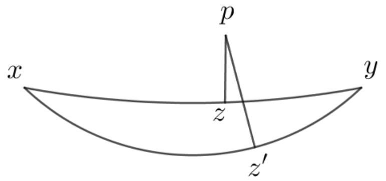

FIGURE 8 – $d(p, z) = d(p, [x, y])$ et $d(p, z') = d(p, [x, y]')$

Preuve : Soient $z \in [x, y]$ et $z' \in [x, y]'$ tels que $d(p, z) = d(p, [x, y])$ et $d(p, z') = d(p, [x, y]')$. Par hyperbolicité, tout point de $[x, y]$ se trouve à une distance inférieure ou égale à δ de $[x, y]'$ ou de $\{y\}$ (en considérant le triangle dégénéré $\{x, y, y\}$) . Ainsi z se trouve à une distance inférieure ou égale à δ :

1. de $[x, y]'$. Alors, il existe $z'' \in [x, y]'$ tel que $d(z, z'') \leq \delta$ et : $d(p, [x, y]') \leq d(p, z'') \leq d(p, z) + d(z, z'') \leq d(p, [x, y]) + \delta$
2. ou de $\{y\}$. Alors :

$$d(p, [x, y]') \leq d(p, y) \leq d(p, z) + d(z, y) \leq d(p, [x, y]) + \delta$$

On a donc toujours $d(p, [x, y]') \leq d(p, [x, y]) + \delta$. On démontre de même que $d(p, [x, y]) \leq d(p, [x, y]') + \delta$ $\square$

Définition 2.11. *Soient un espace métrique (X, d) et $Y \subset X$ un sous-espace. On note :*

$$geod(Y) = \{x \in X, \exists (y, y') \in Y^2, d(y, x) + d(x, y') = d(y, y')\}$$

Lemme 2.12. *Soit Γ un groupe $\delta-$ hyperbolique. Soient $x, y, u, v \in \Gamma$ et soient $u', v' \in geod(\{x, y\})$ des points à distance minimale de respectivement u et v. Alors :*

$$d(u', v') \ \leq \ d(u, v) + 10\delta. \tag{1.29}$$

Preuve :

Si $d(u', v') \leq 8\delta$ alors la majoration est triviale. Nous pourrons donc supposer dans la suite que $d(u', v') > 8\delta$.

Par hyperbolicité :

$$geod(\{u',v'\}) \subset B(geod\{u',x\} \cup geod(\{v',x\}),\delta) \ \subset \ B(geod(\{x,y\}),\delta).$$

Soient $[u,v],[u',v'],[u,u'],[v,v']$ *des segments géodésiques. D'après le lemme 2.9, il existe* $w \in [u,v'] \cap B([u,u'],\delta) \cap B([u',v'],\delta)$.

Soit $z \in [u,u']$ *vérifiant* $d(z,w) \leq \delta$*, alors :*

$$\begin{aligned}
&d(z,geod(\{x,y\}))\\
&\leq d(z,geod(\{u',v'\})) + d(geod(\{u',v'\}),geod(\{x,y\}))\\
&\leq d(z,geod(\{u',v'\})) + \delta\\
&\leq d(z,w) + d(w,geod(\{u',v'\})) + \delta\\
&\leq \ d(z,w) + 2\delta \ \leq \ 3\delta
\end{aligned}$$

Étant donné que u' *se trouve sur une géodésique de* x *à* y *la plus proche possible de* u *et que* $z \in [u,u']$*, on ne peut avoir* $d(z,geod(\{x,y\})) < d(u',z)$*.En effet, autrement, il existerait un* $\tilde{z}$ *sur une nouvelle géodésique de* x *à* y *notée* $[x,y]'$ *telle que* $d(z,\tilde{z}) = d(z,[x,y]')$*. On aurait alors :*

$$\begin{aligned}
&d(u,u') = d(u,z) + d(z,u')\\
&\geq d(u,z) + d(z,\tilde{z})\\
&\geq d(u,\tilde{z})
\end{aligned}$$

Ce qui est contradictoire avec la définition de u'*.*

D'où $d(z,u') \leq d(z,geod(\{x,y\})) \leq 3\delta$ *et* $d(u',w) \leq d(u',z) + d(z,w) \leq 4\delta$*.*
$w \in [u,v']$ *donc par hyperbolicité* $w \in B([v,v'],\delta)$ *ou* $w \in B([v,u],\delta)$*.*
Supposons que $w \in B([v,v'],\delta)$ *alors il existe* $z' \in [v,v']$ *tel que* $d(w,z') \leq \delta$*.*
Alors :

$$\begin{aligned}
&d(z',geod(\{x,y\}))\\
&\leq d(z',w) + d(w,geod(\{x,y\}))\\
&\leq \delta + d(w,geod(\{x,y\}))\\
&\leq \delta + d(w,geod(\{u',v'\}))) + d(geod(\{u',v'\}),geod(\{x,y\})))\\
&\leq d(w,[u',v'])) + 2\delta \ \textit{car } geod(\{u',v'\}) \subset B(geod(\{x,y\}),\delta)\\
&\leq 3\delta
\end{aligned}$$

De la même façon que ci-dessus, étant donné que v' *se trouve sur une géodésique de* x *à* y *la plus proche possible de* v *et que* $z' \in [v,v']$*, on ne peut avoir* $d(z',geod(\{x,y\})) < d(z',v')$*.*
Il vient :

$$\begin{aligned}
&d(w,v') \leq d(w,z') + d(z',v')\\
&\leq d(w,z') + d(z',geod(\{x,y\}))\\
&\leq 4\delta
\end{aligned}$$

Ainsi : $d(u',v') \leq d(u',w) + d(w,v') \leq 4\delta + 4\delta = 8\delta$ *ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc* $w \notin B([v,v'],\delta)$ *et* $w \in B([v,u],\delta)$
Par conséquent $w \in B([u,v],\delta)$ *et :*

$d(u',[u,v])$
$\leq d(u',w) + d(w,[u,v])$
$\leq 4\delta + \delta = 5\delta$

On prouve de la même manière que $d(v',[u,v]) \leq 5\delta$.
Il existe donc $u'', v'' \in [u,v]$ *tels que* $d(u',u'') \leq 5\delta$ *et* $d(v',v'') \leq 5\delta$. *D'où :*

$d(u',v')$
$\leq d(u',u'') + d(u'',v'') + d(v'',v')$
$\leq 5\delta + d(u,v) + 5\delta$
$\leq d(u,v) + 10\delta$ □

Proposition 2.13. *Soient* Γ *un groupe de type fini,* S, T *deux systèmes finis de générateurs de* Γ *tels que* $S^{-1} = S$ *et* $T^{-1} = T$ *et* $\mathscr{G}(Y,S)$, $\mathscr{G}(Y,T)$ *les graphes de Cayley associés. Alors* $\mathscr{G}(Y,S)$ *est hyperbolique si et seulement si* $\mathscr{G}(Y,T)$ *l'est.*

Preuve : *D'après 1.6,* $\mathscr{G}(Y,S)$ *et* $\mathscr{G}(Y,T)$ *sont quasi-isométriques. On conclut alors en utilisant 2.8.*

Nous sommes maintenant en mesure de définir correctement un groupe hyperbolique :

Définition 2.14. *Un groupe de type fini G est dit* ***hyperbolique*** *lorsque le graphe de Cayley défini par G et un système fini de générateurs de G est hyperbolique.*

Proposition 2.15. *Tout groupe fini est hyperbolique. Un groupe libre est hyperbolique (le graphe de Cayley étant un arbre, tout triangle y est complètement aplati...). Un produit libre de groupes hyperboliques est hyperbolique.*

2.2 Le produit de Gromov

Dans un espace métrique, dans [Grom], paragraphe 1.1, M. Gromov définit, pour un point de base x_0 *fixé, une quantité associée à tout couple* (x,y). *Cette définition lui permettra de donner une caractérisation des espaces hyperboliques.*

Définition 2.16. *Soit* (X,d) *un espace métrique. Étant donné un point de base* $x_0 \in X$, *le* ***produit de Gromov*** *de deux points* $y, z \in X$ *est défini par :*

$$(y \mid z)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x_0, y) + d(x_0, z) - d(y, z))$$

Remarque 2.17. *L'idée intuitive du produit de Gromov $(y \mid z)_{x_0}$ est qu'il quantifie la distance de x_0 aux géodésiques reliant y à z. Plus le produit de Gromov est grand, plus cette géodésique est loin du point-base.*

Proposition 2.18. *Un espace métrique (X, d) est $\delta-$ hyperbolique si et seulement si pour tout point de base $x_0 \in X$ et tous $x, y, z \in X$:*

$$(x \mid z)_{x_0} \geq min((x \mid y)_{x_0}, (y \mid z)_{x_0}) - \delta$$

Preuve : *Supposons que (X, d) est $\delta-$ hyperbolique alors :*

$$d(x, z) + d(y, x_0) \leq max(d(x, y) + d(z, x_0), d(x, x_0) + d(z, y)) + 2\delta$$

Il vient :

$$d(x, z) + d(y, x_0) - (d(x, x_0) + d(z, x_0)) \leq$$
$$max(d(x, y) - d(x, x_0), d(z, y) - d(z, x_0)) + 2\delta$$

D'où :

$$-d(x, z) - d(y, x_0) + (d(x, x_0) + d(z, x_0)) \geq$$
$$min(-d(x, y) + d(x, x_0), -d(z, y) + d(z, x_0)) - 2\delta$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$d(x, x_0) + d(z, x_0) - d(x, z)$$
$$\geq d(y, x_0) + min(-d(x, y) + d(x, x_0), -d(z, y) + d(z, x_0)) - 2\delta$$
$$\geq min(d(y, x_0) + d(x, x_0) - d(x, y), d(y, x_0) + d(z, x_0) - d(z, y)) - 2\delta$$

Finalement, il vient :

$$(x \mid z)_{x_0} \geq min((y \mid x)_{x_0}, (y \mid z)_{x_0}) - \delta$$

La réciproque s'obtient par le même raisonnement □

Proposition 2.19. *Soient x_0, y, z trois points d'un espace métrique. Il existe un tripode T et une isométrie $f : \{x_0, y, z\} \to T$ d'image les trois extrémités du tripode. De plus,$(y \mid z)_{x_0}$ est la longueur de l'arête de T qui a pour extrémité $f(x_0)$.*

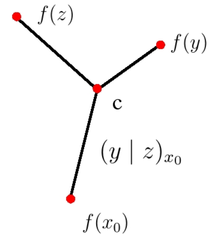

FIGURE 9 – Le produit de Gromov est la longueur de l'arête de T qui a pour extrémité x_0.

Proposition 2.20. *Soit (X, d) un espace géodésique et $(x, y, z) \in X^3$. Alors :*

$$(y \mid z)_x \leq d(x, geod(\{y, z\})$$

Preuve : *Soit $u \in geod(\{y, z\})$ tel que $d(x, u) = d(x, geod(\{y, z\})$. On sait que :*

$$d(x, z) \leq d(x, u) + d(u, z) \Longleftrightarrow d(x, u) \geq d(x, z) - d(u, z)$$

De même :

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \Longleftrightarrow d(x, u) \geq d(x, y) - d(u, y)$$

En sommant les deux inégalités puis en divisant par 2, il vient :

$$d(x, y) \leq \frac{1}{2}\left[d(x, z) + d(x, y) - (d(u, z) + d(u, y))\right] \Longleftrightarrow d(x, y) \leq \frac{1}{2}\left[d(x, z) + d(x, y) - d(y, z)\right] \square$$

3 Modules de Fredholm

L'étude de la $K-$ homologie trouve ses racines aussi bien dans la théorie des opérateurs que dans la théorie de l'indice d'Atiyah et Singer.
Kasparov, dans [Ka2], a développé une idée d'Atiyah et a montré que le groupe abélien généré par les classes d'homotopie des modules de Fredholm est un autre modèle analytique pour la $K-$ homologie, cette fois pour la $K-$ homologie en degré 0 d'un espace métrique X. En plus, Kasparov a généralisé la $K-$ homologie au cadre des C^*-algèbres.
Dans ce qui suit, nous allons introduire la définition par Kasparov de la $K-$ homologie en terme de modules de Fredholm.

3.1 Modules de Fredholm sur une C* algèbre

Les différentes définitions et propriétés ci-dessous sont extraites de [HiRo], chapitre 8 (p.199).

Définition 3.1. *Soit V un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. On dit que V est $\mathbb{Z}/2$ gradué s'il admet une décomposition en somme directe $V = V^+ \oplus V^-$.*
Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. On dit que T est pair si $T(V^\pm) \subseteq V^\pm$ et on dit que T est impair si $T(V^\pm) \subseteq V^\mp$.

Définition 3.2. *Soit A une C^* algèbre. Un* **module de Fredholm pair** *sur A est un triplet $(\mathscr{H}, \rho, F)$ où :*

1. *$\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2$ gradué*

2. $\rho : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H})_+$ *est une représentation paire de* A *sur* $\mathscr{H}^\pm$
3. $F \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_-$ *est un opérateur linéaire borné impair tel que pour tout* $a \in A$ *:*
   (a) $(F^2 - 1)\rho(a) \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$
   (b) $(F - F^*)\rho(a) \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$
   (c) $[F, \rho(a)] \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$

Lorsque la condition 3.(b) n'est pas nécessairement vérifiée, nous parlerons de ***pré-module de Fredholm****.*

Remarque 3.3. *Grâce à la décomposition polaire, nous montrerons dans la Proposition 7.12 que tout pré-module de Fredholm est homotope à un module de Fredholm. Ainsi, les groupes de* $K-$*homologie de Kasparov peuvent être définis comme le groupe de Grothendieck des classes d'homotopie des pré-modules de Fredholm.*

Définition 3.4. *On définit l'ensemble des* ***opérateurs traçables*** *sur un espace de Hilbert* $\mathscr{H}$ *par :*

$$\ell^p(\mathscr{H}) = \{T \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) / (\mu_n(T)) \in \ell^p(\mathbb{N})\}$$

où les $\mu_n(T)$ *sont les valeurs singulières de l'opérateur* T*.*

Définition 3.5. *Soit* $p \geq 1$*.Un module de Fredholm* $(\mathscr{H}, \rho, F)$ *sur une* C^* *algèbre* A *est dit* p ***sommable*** *lorsqu'il existe une sous-algèbre* $\mathscr{A}$ *dense dans* A *tel que pour tout* $a \in \mathscr{A}$*, :*

1. $(F^2 - 1)\rho(a) \in \ell^p(\mathscr{H})$
2. $(F - F^*)\rho(a) \in \ell^p(\mathscr{H})$
3. $[F, \rho(a)] \in \ell^p(\mathscr{H})$

Définition 3.6. *Soit* $(\mathscr{H}, \rho, F)$ *un module de Fredholm et soit un isomorphisme unitaire* $U : \mathscr{H}' \to \mathscr{H}$ *préservant la graduation. Alors le triplet* $(\mathscr{H}', U^*\rho U, U^*FU)$ *est également un module de Fredholm.*
On dit que $(\mathscr{H}', U^*\rho U, U^*FU)$ *est* ***unitairement équivalent*** *à* $(\mathscr{H}, \rho, F)$*.*

Définition 3.7. *Soit* $(\mathscr{H}, \rho, F_t)$ *une famille de modules de Fredholm paramétrée par* $t \in [0; 1]$*. Lorsque la fonction* $t \mapsto F_t$ *est continue en norme, on dit que la famille définit une homotopie d'opérateurs entre les modules de Fredholm* $(\mathscr{H}, \rho, F_0)$ *et* $(\mathscr{H}, \rho, F_1)$*.*

Définition 3.8. *On dit qu'un module de Fredholm sur une* C^* *algèbre* A *est* ***dégénéré*** *lorsque pour tout* $a \in A$ *:*

1. $\rho(a)F = \rho(a)F^*$
2. $\rho(a)F^2 = \rho(a)$
3. $[F, \rho(a)] = 0$

Définition 3.9. *On définit une opération d'addition entre deux modules de Fredholm :*

$$(\mathscr{H}_1, \rho_1, F_1) \bigoplus (\mathscr{H}_2, \rho_2, F_2) = (\mathscr{H}_1 \bigoplus \mathscr{H}_2, \rho_1 \bigoplus \rho_2, F_1 \bigoplus F_2)$$

Définition 3.10. *On définit la relation d'équivalence entre modules de Fredholm par la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes :*

1. *l'équivalence unitaire*
2. *l'homotopie d'opérateurs*
3. *soit M un module de Fredholm quelconque et D un module de Fredholm dégénéré, alors $M \backsim M \bigoplus D$*

Cela signifie que deux modules de Fredholm sont équivalents s'ils sont reliés par une suite finie constituée des trois relations précédemment définies.

Proposition 3.11. *L'ensemble des classes d'équivalences des modules de Fredholm pairs sur une C^* algèbre A muni de la relation d'addition précédemment définie est un groupe abélien. Il est noté $K^0(A)$ et appelé le **groupe de K-homologie de Kasparov**.*

3.2 Modules de Fredholm sur un groupe discret

Les définitions et propriétés ci-dessous sont explicitées dans [JuVa].

Définition 3.12. *Soit G un groupe discret dénombrable. Un module de Fredholm sur G est un triplet $(\mathscr{H}, \rho, F)$ tel que :*

1. *$\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2$ gradué : $\mathscr{H} = \mathscr{H}^+ \oplus \mathscr{H}^-$*
2. *$\rho : G \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est une représentation unitaire paire de G.*
3. *$F \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_-$ est un opérateur impair tel que pour tout $g \in G$:*
   (a) $F^2 - 1 \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$
   (b) $F - F^* \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$
   (c) $[F, \rho(g)] \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$

Définition 3.13. *L'ensemble des classes d'équivalence des modules de Fredholm sur G muni de la relation d'addition précédemment définie est un groupe abélien. Il est noté $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*

Kasparov a prouvé que $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ pouvait être muni d'une structure d'anneau grâce à une multiplication construite à partir de produits tensoriels.

4 Complexes simpliciaux

4.1 Géométrie des complexes simpliciaux

Définition 4.1. *Un* ***ensemble simplicial*** *est la donnée :*

1. *d'une suite* $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'ensembles où chaque* Δ_n *est appelé l'ensemble des* $n-$ *simplexes de* Δ_*.
2. *d'une famille d'applications nommée "faces" :*
$$\partial_i : \Delta_n \to \Delta_{n-1} \text{ pour } n > 0 \text{ et } 0 \leq i \leq n$$
3. *d'une famille d'applications nommées "dégénérescences"*
$$s_j : \Delta_n \to \Delta_{n+1} \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } 0 \leq i \leq n$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i$ *si* $i < j$
2. $\partial_i \circ s_j = s_{j-1} \circ \partial_i$ *si* $i < j$
3. $\partial_i \circ s_j = id$ *si* $i = j$ *ou* $i = j+1$
4. $\partial_i \circ s_j = s_j \circ \partial_{i-1}$ *si* $i > j+1$
5. $s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i$ *si* $i \leq j$

Exemple 4.2. *Soit un ensemble* X. *Posons* $\Delta_n(X) = X^{n+1}$ *et :*

1. $\partial_i([x_0, ..., x_n]) = [x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_n]$ *où l'élément* x_i *a été supprimé*
2. $s_j([x_0, ..., x_n]) = [x_0, ..., x_j, x_j, ..., x_n]$ *où l'élément* x_j *a été doublé*

Définition 4.3. *L'ensemble des simplexes appartenant à* $\bigcup_j Im(s_j)$ *sont les* ***dégénérés***.

Définition 4.4. *Notons* $C_n(\Delta_*, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\Delta_n/\mathbb{C}(\bigcup_j Im(s_j))$. *On définit alors le* ***complexe de chaînes*** *associé à l'ensemble simplicial par :*

$$0 \longleftarrow C_0(\Delta_*, \mathbb{C}) \xleftarrow{\partial} C_1(\Delta_*, \mathbb{C}) \xleftarrow{\partial} ... \xleftarrow{\partial} C_n(\Delta_*, \mathbb{C}) \xleftarrow{\partial} ...$$

où $\partial : C_n(\Delta_*, \mathbb{C}) \to C_{n-1}(\Delta_*, \mathbb{C})$ *est défini par :*

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

Il vaut 0 en degré -1 (on dit que le complexe est augmenté) et $C_n(\Delta_*, \mathbb{C})$ *en degré* $n \geq 0$.

Lemme 4.5. $\partial^2 = 0$

Remarque 4.6. *Soit un anneau A, tout $A-$ module M peut être interprété comme un complexe de chaîne concentré en degré 0 :*

$$0 \longleftarrow 0 \xleftarrow{\partial} M(\Delta_*, \mathbb{C}) \xleftarrow{\partial} 0 \xleftarrow{\partial} 0 \xleftarrow{\partial} ...$$

Définition 4.7. *Une **augmentation** d'un complexe, situé en degrés positifs est un morphisme de complexes vers un complexe simple :*

$$\begin{tikzcd}
0 & M_0 \arrow[l] \arrow[d] & M_1 \arrow[l] \arrow[d] & M_2 \arrow[l] \arrow[d] & ... \arrow[l] \\
0 & M \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & ... \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Un tel diagramme peut être ré-interprété comme :

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow M_0 \xleftarrow{\partial} M_1 \xleftarrow{\partial} M_2 \xleftarrow{\partial} ...$$

4.2 Homologie simpliciale.

4.2.1 Complexes de chaînes.

Définition 4.8. *Un **complexe de groupes abéliens** est la donnée d'une suite $(C_n)_{n\geq 0}$ de groupes abéliens et d'une suite $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\geq 1}$ d'homomorphismes vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.*

*L'application $d : \oplus_n C_n \to \oplus_n C_{n-1}$ est appelée la différentielle du complexe. Les éléments du noyau de d_n sont appelés les **cycles** de C_n, ceux de l'image sont appelés les **bords** de C_{n-1}.*
Le complexe (C_n, d_n) est aussi noté C_*.

*L'**homologie** d'un tel complexe est la suite des groupes abéliens quotients :*

$$H_n(C) = \frac{Ker(d_n)}{Im(d_{n+1})}$$

*$H_n(C)$ est appelé le **n-ième groupe d'homologie**.*

Définition 4.9. *Une **résolution** d'un module M par un complexe de chaînes M_* est un morphisme*

$$\begin{tikzcd}
0 & M_0 \arrow[l] \arrow[d] & M_1 \arrow[l] \arrow[d] & M_2 \arrow[l] \arrow[d] & ... \arrow[l] \\
0 & M \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & ... \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

qui est un "quasi-isomorphisme", c'est-à-dire un morphisme qui induit des isomorphisme en homologie :

1. $Ker(\partial : M_n \to M_{n-1}) = Im(\partial : M_{n+1} \to M_n)$ *pour* $n > 0$
2. $M_0/Im(\partial : M_1 \to M_0) \simeq M$

Autrement dit, le complexe augmenté est exact.

Définition 4.10. *Un* ***morphisme de chaînes de complexes différentiels*** $f : C_* \to C'_*$ *est une suite d'homomorphismes* $f_n : C_n \to C'_n, n \geq 0$ *telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C'_{n+1} \arrow[d, "d'_{n+1}"] \\ C_n \arrow[r, "f_n"] & C'_n \end{tikzcd}$$

$$d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}, \forall n \geq 1$$

Une telle suite de morphismes de complexes différentiels transforme les cycles de C_n *en cycles de* D_n*, de même pour les bords en bords et induit un homomorphisme sur les groupes d'homologie.*

Proposition 4.11. *Si* $\varphi : C \to C'$ *et* $\psi : C' \to C''$ *sont deux morphismes de chaînes, alors* $\psi \circ \varphi$ *est un morphisme de chaînes.*

Preuve : *On sait par hypothèse que* $d''_p \circ \psi_p = \psi_{p-1} \circ d'_p$ *donc* $d''_p \circ \psi_p \circ \varphi_p = \psi_{p-1} \circ d'_p \circ \varphi_p$ *On sait aussi par hypothèse que* $d'_p \circ \varphi_p = \varphi_{p-1} \circ d_p$ *donc :*

$$d''_p \circ (\psi_p \circ \varphi_p) = \varphi_{p-1} \circ \varphi_{p-1} \circ d_p = (\psi_{p-1} \circ \varphi_{p-1}) \circ d_p$$

Ainsi $\psi \circ \varphi$ *est bien une application de chaînes* $\square$

Définition 4.12. *Soit* φ *et* ψ *deux morphismes de complexes différentiels. Une* ***homotopie de complexes de chaînes*** *de* φ *vers* ψ *où* $\varphi, \psi : C \to C'$ *est une famille d'homomorphismes* $h = (h_n)$ *avec* $h_p : C_p \to C'_{p+1}$ *telle que :*

$$\psi_p - \varphi_p = d'_{p+1} h_p + h_{p-1} d_p$$

On dit alors que φ *et* ψ *sont homotopes. Pour alléger les notations, on pourra omettre les indices :*

$$\psi - \varphi = d'h + hd$$

Remarque 4.13. *Soient* (C_*, ∂) *et* (C'_*, ∂') *deux complexes différentiels. On pose* $\mathcal{H}om_n(C_*, C'_*) = \prod_k \mathcal{H}om_{\mathbb{C}-lin}(C_k, C'_{k+n})$*.*

Alors $\mathcal{H}om_*(C_*, C'_*)$ *est également un complexe différentiel. En effet, on peut le munir :*

1. *d'une graduation en posant :*
$$deg(\varphi) = deg(\varphi(\alpha)) - deg(\alpha)$$
2. *d'une différentielle* δ *en posant :*
$$\delta\varphi = \partial' \circ \varphi - (-1)^{deg(\varphi)} \varphi \circ \partial$$

On a bien $\delta^2 = 0$ *car pour tout* $\varphi \in \mathcal{H}om(C_*, D_*)$ *:*

$\delta^2\varphi = \delta(\delta\varphi) = \delta(\partial' \circ \varphi - (-1)^{deg(\varphi)} \varphi \circ \partial)$
$= \partial' \circ (\partial' \circ \varphi - (-1)^{deg(\varphi)} \varphi \circ \partial) - (-1)^{deg(\delta\varphi)} (\partial' \circ \varphi - (-1)^{deg(\varphi)} \varphi \circ \partial) \circ \partial$
$= -(-1)^{deg(\varphi)} \partial' \circ \varphi \circ \partial) - (-1)^{deg(\delta\varphi)} \partial' \circ \varphi \circ \partial$
$= 0$ *car* $deg(\delta\varphi) = deg(\varphi) - 1$

Un morphisme de complexes différentiels est donc un élément de degré 0 dans $\mathcal{H}om(C_*, C'_*)$ *tel que* $\delta\varphi = 0$ *(c'est à dire un 0-cycle). En effet, si* $deg(\varphi) = 0$ *et si* $\delta\varphi = 0$ *alors :*

$$\delta\varphi = 0 = \partial' \circ \varphi - (-1)^0 \varphi \circ \partial$$

et

$$\partial' \circ \varphi = \varphi \circ \partial$$

On montre également que φ_1 *est homologue à* φ_2 *(c'est à dire il existe une homotopie de chaînes entre* φ_1 *et* φ_2*) si et seulement si* $\varphi_1 - \varphi_2$ *est un bord dans* $\mathcal{H}om(C_*, C'_*)$*.*
$H_0(\mathcal{H}om(C_*, C'_*))$ *est l'ensemble des classes d'équivalence (pour l'homotopie de chaînes) des applications de chaînes.*

4.3 Le complexe de Bar.

Définition 4.14. *Le complexe de Bar, noté* $\triangle_\bullet(X)$*, d'un ensemble* X *est l'ensemble simplicial ayant :*

1. *pour simplexes* $\triangle_n(X) = X^{n+1}$
2. $\partial_i : \triangle_n(X) \to \triangle_{n-1}(X)$ *telle que :*
$$\partial_i([x_0, ..., x_n]) = [x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n]$$

*pour **i ème face***

3. $s_j : \triangle_n(X) \to \triangle_{n+1}(X)$ *telle que :*

$$s_j([x_0, ..., x_n]) = [x_0, ..., x_j, x_j, ..., x_n]$$

*pour **j ème dégénérescence***

*Le **support** d'un simplexe de Bar est défini par :*

$$Supp([x_0, ..., x_n]) = \{x_0, ..., x_n\} \subset X$$

Proposition 4.15. *Soient deux ensembles X et Y. A toute application $f : X \to Y$ on peut associer une application simpliciale $f_\bullet : \triangle_\bullet(X) \to \triangle_\bullet(Y)$ définie par :*

$$f_\bullet([x_0, ..., x_n]) = [f(x_0), ..., f(x_n)]$$

Définition 4.16. *Le **complexe de chaîne de Bar**, noté $C_*(X, \mathbb{C})$ d'un ensemble X est le groupe abélien libre de base le complexe de Bar $\triangle_\bullet(X)$ modulo le sous-espace engendré par les simplexes dégénérés avec :*

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i$$

*Le **support** d'une chaîne de Bar est l'union des supports des simplexes intervenant dans sa décomposition (dont les coefficients sont non nuls).*

Proposition 4.17. *Soit $x \in X$ un point de base et soit l'application*

$$s_x : C_*(X, \mathbb{C}) \to C_{*+1}(X, \mathbb{C})$$

définie par :

$$s_x([x_0, ..., x_n]) = [x, x_0, ..., x_n]$$

Alors s_x une homotopie contractante du complexe de bar augmenté.
$s_x([x_0, ..., x_n])$ est appelé le cône de sommet x.

Si $X = G$ est un groupe, alors les opérateurs $(s_x)_{x \in G}$ sont compatibles avec l'action de groupe dans le sens où le diagramme suivant est commutatif pour tout $g \in G$:

$$\begin{tikzcd} C_*(G, \mathbb{C}) \arrow[r, "s_x"] \arrow[d, "\pi(g)"] & C_{*+1}(G, \mathbb{C}) \arrow[d, "\pi(g)"] \\ C_*(G, \mathbb{C}) \arrow[r, "s_{gx}"] & C_{*+1}(G, \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

C'est à dire $\pi(g) \circ s_x \circ \pi(g^{-1}) = s_{gx}$ *avec :*

$$\pi(g)([x_0, ..., x_n]) = [gx_0, ..., gx_n]$$

.

Preuve :

$(\partial \circ s_x + s_x \circ \partial)([x_0, ..., x_{n-1}])$
$= \partial([x, x_0, ..., x_{n-1}]) + s_x(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i [x_0, ..., \tilde{x_i} x_{n-1}])$

$= [x_0, ..., x_{n-1}] + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1} [x, x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_{n-1}] + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i [x, x_0, ..., \tilde{x_i} x_{n-1}]$

$= [x_0, ..., x_{n-1}]$

Si $X = G$*, démontrons la compatibilité avec l'action du groupe : pour tout simplexe* $[x_0, ..., x_n]$*, on a :*

$(\pi(g) \circ s_x \circ \pi(g^{-1}))([x_0, ..., x_n]) = (\pi(g) \circ s_x)([g^{-1}x_0, ..., g^{-1}x_n])$
$= (\pi(g))([x, g^{-1}x_0, ..., g^{-1}x_n]) = [gx, x_0, ..., x_n] = s_{gx}([x_0, ..., x_n])$ $\square$

Lemme 4.18. *Soient* $\varphi_*, \psi_* : C_*(X, \mathbb{C}) \to C_*(Y, \mathbb{C})$ *des morphismes de chaînes de complexes de Bar (4.10) qui induisent l'identité en homologie (i.e : qui sont compatibles avec les augmentations). Alors l'opérateur linéaire* $h(\varphi, \psi) : C_*(X, \mathbb{C}) \to C_{*+1}(Y, \mathbb{C})$ *défini par :*

$$h(\varphi, \psi)([x_0, ..., x_n]) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i [\varphi_i(x_0, ..., x_i), \psi_{n-i}(x_i, ..., x_n)]$$

définit une homotopie de complexes de chaînes (4.12) entre φ *et* ψ *:*

$$\psi_* - \varphi_* = \partial \circ h(\varphi, \psi) + h(\varphi, \psi) \circ \partial$$

Preuve :
1ère étape : *en degré strictement positif.*
Soit un simplexe $[x_0, ..., x_n]$*, alors :*

$(\partial \circ h(\varphi, \psi) + h(\varphi, \psi) \circ \partial)([x_0, ..., x_n])$
$= \partial(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i [\varphi_i(x_0, ..., x_i), \psi_{n-i}(x_i, ..., x_n)]) +$

$h(\varphi, \psi)(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j [x_0, ..., \tilde{x_j}, ..., x_n])$

$= \sum_{i=0}^{n}((-1)^i [\partial\varphi_i(x_0, ..., x_i), \psi_{n-i}(x_i, ..., x_n)]$

$+(-1)^{i+1}\left[\varphi_i(x_0,...,x_i), \partial\psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right])$
$+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\left[\varphi(x_0,...,x_i), \psi_{n-i}(x_i,...,\tilde{x_j},...,x_n)\right]+$

$\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i-1}\left[\varphi(x_0,...,\tilde{x}_j,...,x_i), \psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right])$

Or :

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\partial\varphi_i(x_0,...,x_i), \psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right]$
$+(-1)^{i+1}\left[\varphi_i(x_0,...,x_i), \partial\psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right])$
$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\varphi_i(\partial\left[x_0,...,x_i\right]), \psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right]$
$+(-1)^{i+1}\left[\varphi_i(x_0,...,x_i), \psi_{n-i}(\partial\left[x_i,...,x_n\right])\right]$
$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\left[\varphi_i(\left[x_0,...,\tilde{x}_j,x_i\right]), \psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right]$

$+(-1)^i\left[\varphi_i(\left[x_0,x_{i-1}\right]), \psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right]+$
$(-1)^{i+1}\left[\varphi_i(x_0,...,x_i), \psi_{n-i}(\left[x_{i+1},...,x_n\right])\right]$
$+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{j+1}\left[\varphi_i(x_0,...,x_i), \psi_{n-i}(\left[x_{i+1},...,\tilde{x}_j,...,x_n\right])\right])$

Si nous revenons à la somme principale, le premier et le dernier terme de la somme précédente sont annulés et les termes intermédiaires correspondent à une somme télescopique :

$(\partial\circ h(\varphi,\psi)+h(\varphi,\psi)\circ\partial)(\left[x_0,...,x_n\right])$
$=\sum_{i=0}^{n}\left[\varphi_i(x_0,...,x_{i-1}), \psi_{n-i}(x_i,...,x_n)\right]-\left[\varphi_i(x_0,...,x_i), \psi_{n-i}(x_{i+1},...,x_n)\right]$
$=(\psi-\varphi)(\left[x_0,...,x_n\right])$

2ème étape : *en degré 0.*

$(\partial\circ h(\varphi,\psi)+h(\varphi,\psi)\circ\partial)(\left[x_0\right])$
$=\partial\circ h(\varphi,\psi)(\left[x_0\right])=\partial(\left[\varphi(x_0),\psi(x_0)\right])$

Or $\varphi(x_0)=\sum_{\alpha}\lambda_\alpha y_\alpha$ *et* $\psi(x_0)=\sum_{\beta}\mu_\beta y_\beta$ *avec :*

$$\sum_{\alpha}\lambda_\alpha=deg(\varphi)\ \ et\ \sum_{\beta}\mu_\beta=deg(\psi)$$

D'où :

$(\partial \circ h(\varphi,\psi) + h(\varphi,\psi)\circ\partial)([x_0])$
$= \partial(\sum\limits_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha\mu_\beta\,[y_\alpha, y_\beta])$
$= \sum\limits_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha\mu_\beta([y_\beta]-[y_\alpha])$
$= (\sum\limits_{\alpha}\lambda_\alpha)(\sum\limits_{\beta}\mu_\beta\,[y_\beta]) - (\sum\limits_{\beta}\mu_\beta)(\sum\limits_{\alpha}\lambda_\alpha\,[y_\alpha])$
$= (\sum\limits_{\alpha}\lambda_\alpha)\psi([x_0]) - (\sum\limits_{\beta}\mu_\beta)\varphi([x_0])$
$= (deg(\varphi))\psi - (deg(\psi))\varphi$
$= \psi - \varphi$ *car par hypothèse* $deg(\varphi) = deg(\psi) = 1\square$

4.4 Les complexes de Rips d'un espace métrique.

Définition 4.19. *Soit* (X, d) *un espace métrique et soit* $R > 0$*. Le* ***complexe de Rips*** *du triplet* (X, d, R) *est le sous complexe simplicial du complexe de Bar* $\Delta_\bullet(X)$ *défini par les simplexes de Bar de diamètre au plus* R *:*

$$\Delta_n^R(X) = \{(x_0, ..., x_n) \in X^{n+1}, d(x_i, x_j) \leq R, 0 \leq i, j \leq n\}$$

Proposition 4.20. *Si* $f : X \to Y$ *est une application contractante entre deux espaces métriques alors l'application simpliciale* $f_\bullet$ *conserve les complexes de Rips. C'est-à-dire :*

$$f_\bullet : \Delta_\bullet^R(X) \to \Delta_\bullet^R(Y), R \geq 0$$

Plus généralement, si $g : X \to Y$ *est une application entre espaces métriques telle qu'il existe une application croissante* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *satisfaisant :*

$$d_Y(g(x), g(x')) \leq \varphi(d_X(x, x')), (x, x') \in X^2$$

alors $g_\bullet$ *conserve les complexes de Rips dans le sens où :*

$$g_\bullet : \Delta_\bullet^R(X) \to \Delta_\bullet^{\varphi(R)}(Y)$$

Remarque 4.21. *En particulier, toute action de groupe isométrique sur un espace métrique* (X, d) *engendre une action simpliciale sur le complexe de Rips* $\Delta_\bullet^R(X)$ *pour tout* $R \geq 0$*.*

Définition 4.22. *Les* ***complexes de chaînes de Rips****, notés* $C_*^R(X, \mathbb{C})$ *d'un espace métrique est le groupe abélien libre de base* $\Delta_\bullet^R(X)$ *modulo le sous espace engendré par les simplexes dégénérés. Ce sont des sous-complexes du complexe de chaîne de Bar.*

4.5 Espace métrique associé à un groupe

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe de type fini et S un système fini de générateurs de Γ. On suppose que $S^{-1} = S$ et que $e \notin S$. On note d la métrique des mots sur Γ associée à S. Elle est invariante par translations à gauche.
Muni de la métrique de mots, G peut être vu comme un espace métrique, on peut donc s'intéresser au complexe de Rips qui lui est associé.

Définition 4.23. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le **complexe de Rips** $P_n(G, S)$ est le complexe simplicial dont les $k-$simplexes sont les $(k+1)-$uples $(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_k)$ d'éléments de G distincts deux à deux tels que $max_{i,j}(d(\gamma_i, \gamma_j)) \leq n$.*

Moins formellement, il s'agit du complexe formé par des simplexes dont le diamètre est plus petit que n. On peut donc "enfermer" chaque simplexe dans une boule de rayon n.

Remarque 4.24.

1. *$P_n(G, S)$ est localement fini et de dimension finie. En effet, soit p le cardinal de la boule fermée :*
$$B(e, n) = \{\gamma \in \Gamma; d(e, \gamma) \leq n\}$$
Alors $P_n(G, S)$ est de dimension au plus $p - 1$, et tout sommet de $P_n(G, S)$ appartient à exactement $p - 1$ arêtes.
2. *Les sommets de $P_n(G, S)$ sont les éléments de G.*

Proposition 4.25. *G agit simplicialement sur $P_n(G, S)$ par translation à gauche :*
si $\sigma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_k)$ est un $k-$simplexe de $P_n(\Gamma, S)$ et si $\gamma \in G$ alors $\gamma\sigma$ est le simplexe $(\gamma\gamma_0, \gamma\gamma_1, ..., \gamma\gamma_k)$. Autrement dit, l'action de G est compatible avec les faces et les dégénérescences.

Définition 4.26. *Soit $R > 0$, nous noterons $(\Delta_*^R(G), \partial) = \oplus_n(\Delta_n^R(G), d_n)$ le complexe de Rips où :*

1. *$\Delta_n^R(G)$ est l'ensemble des $n-$ simplexes de diamètre inférieur ou égal à R*
$$S' \in \Delta_n^R(G) \Longleftrightarrow S' \subset G, \mid S' \mid = n, diam(S') \leq R$$
2. *$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ avec : $\partial_i : \Delta_n^R(G) \to \Delta_{n-1}^R(G)$ tel que :*
$$\partial_i(g_0, ..., g_n) = [g_0, ..., \widehat{g_i}, ...g_n]$$
où g_i a été supprimé en ième position (en effet, le diamètre n'est pas augmenté par l'opérateur de bord).

Exemple 4.27. *$\Delta_1^R(G, d_S)$ est le graphe de Cayley de G.*

Exemple 4.28. *Si* $\Gamma = \mathbb{Z}$ *et* $S = \{1; -1\}$ *alors le complexe de Rips* $P_2(\Gamma, S)$ *est représenté par :*

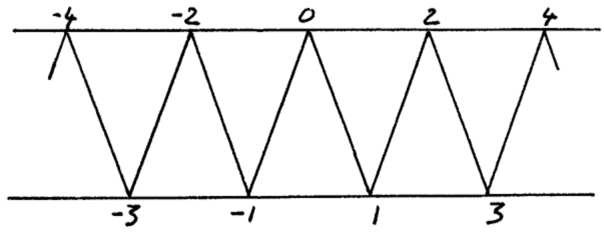

FIGURE 10 – Complexe de Rips pour $G = \mathbb{Z}$ et $S = \{1; -1\}$

Proposition 4.29. *Le complexe de chaîne* $C_*(\Delta^R(D, d_S)$ *est tel que* $C_k(\Delta^R(D, d_S))$ *est un* $\mathbb{C}[G]-$*module libre avec un nombre fini de générateurs.*

Lemme 4.30. *Soit un groupe* G *est de type fini engendré. Désignons par* $\mathscr{M}_r$ *l'ensemble des mots distincts deux à deux à* r *lettres de* G.
Alors $\mathscr{M}_r$ *est à croissance au plus exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe* $C \gg 0$ *(ne dépendant pas de* r*) tel que :*

$$card(\mathscr{M}_r) \leq C^{r+1}$$

Preuve : *Désignons par* $\mathscr{G}$ *l'ensemble fini de générateurs de* G. *Soient* $N = card(\mathscr{G})$ *et* $f : \mathscr{G}^r \to G$ *telle que :*

$$f(g_1, ..., g_r) = g_1 g_2 ... g_r$$

Alors $\mathscr{M}_r \subset Im(f) \subset$ *donc* $card(\mathscr{M}_r) \leq card(Im(f))$ *(en effet, il se peut que deux facteurs d'un élément de* $Im(f)$ *soient inverses l'un de l'autre et s'annulent).*
Or $card(Im(f) \leq card(\mathscr{G}^r) = N^r$. *Donc* $card(\mathscr{M}_r) \leq N^r \square$

Proposition 4.31. ***Le volume de la sphère*** $B(x_0, r)$ ***dans*** $\Delta_*^R(G)$ ***est à croissance au plus exponentielle****, c'est-à-dire qu'il existe* $C \gg 0$ *tel que :*

$$card(s \in \Delta_*^R(G), d(x_0, s) = r) \leq C^{r+1}$$

Preuve : *La dimension de* $\Delta_*^R(G)$ *est globalement bornée, car le nombre de sommets composant chaque simplexe est majoré par le cardinal de* $B(e, R)$, *la boule centrée sur l'élément neutre et de rayon* R.
En effet, d'une part la distance est invariante par translation et d'autre part ce cardinal est fini (car la distance entre deux éléments de G *est au moins 1). Posons* $x_0 = e$ *et appliquons le lemme précédent* $\square$

Théorème 4.32. ***Théorème de Rips*** *: Soit G un groupe $\delta-$hyperbolique pour le système de générateurs S. Si $n \geq 4\delta + 2$ alors le complexe de Rips $P_n(G, S)$ est contractile.*

Preuve : *Cf. [GhHa] p. 72.*

5 Recherche d'une homotopie contractante du complexe de Rips augmenté

Soient G un groupe hyperbolique et $C_*^R(G, \mathbb{C})$ le complexe de Rips associé pour $R \gg 0$.
Nous savons déjà qu'il existe une homotopie contractante de $C_*^R(G, \mathbb{C})$ (Cf Théorème 4.32).
Nous allons maintenant construire une homotopie $h = (h_n)$ contractante "presque " équivariante sous l'action du groupe (donc peu dépendante du point de base). Cette "presque" équivariance sera essentielle pour la compacité des commutateurs lors de la construction de notre module de Fredholm finiment sommable.
On cherche donc une homotopie contractante, c'est-à-dire un opérateur linéaire :

$$h_* : C_*^R(G, \mathbb{C}) \to C_{*+1}^R(G, \mathbb{C})$$

tel que :

$$\partial h + h \partial = Id$$

Où ∂ est l'opérateur de bord.

Supposons les homomorphismes $h_0, h_1, ..., h_{n-1}$ déjà construits. Il s'agit de construire h_n vérifiant les propriétés recherchées.

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}^{R_n}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1}^{R_{n+1}}(G) \arrow[d, "\partial"] \\
C_n^{R_n}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] \arrow[ur, dotted, "h_n"] & C_n^{R_n}(G) \arrow[d, "\partial"] \\
C_{n-1}^{R_n}(G) \arrow[r] \arrow[ur, "h_{n-1}"] & C_{n-1}^{R_{n-1}}(G)
\end{tikzcd}$$

L'application h_n *devant être linéaire sur* $C_n^R(G,\mathbb{C})$*, il suffit de construire les images des* $n-$ *simplexes de diamètre inférieur à* R *dans* G.
Soient $g_0, g_1, ..., g_n \in G$*, considérons le* $n-$ *simplexe* $\alpha = [g_0, g_1, ..., g_n] \in C_n^R(G,\mathbb{C})$.

Recherche d'une condition nécessaire et suffisante

Tout d'abord, il faut que la condition $\partial h_n + h_{n-1}\partial = incl_n$ *soit vérifiée. Elle le sera si pour tous les* $n-$ *simplexes :*

$$\begin{gathered}(\partial h_n + h_{n-1}\partial)(\alpha) = \alpha \\ \Leftrightarrow \partial(h_n(\alpha)) = \alpha - (h_{n-1}\partial)(\alpha) \\ \Leftrightarrow \partial(h_n(\alpha)) = (incl_n - h_{n-1}\partial)(\alpha)\end{gathered}$$

Une condition nécessaire et suffisante est donc que $(incl_n - h_{n-1}\partial)(\alpha)$ *soit un bord.*
Une condition nécessaire est que cela soit un cycle (car $\partial \circ \partial = 0$*). Vérifions le avant de chercher à construire* $h_n(\alpha)$ *:*

$$\partial(incl_n - h_{n-1}\partial)(\alpha) = (\partial \circ incl_n - \partial \circ h_{n-1} \circ \partial)(\alpha)$$

Or, par récurrence : $\partial h_{n-1} + h_{n-2}\partial = incl_{n-1}$ *d'où :*

$$\begin{aligned}&\partial(incl_n - h_{n-1}\partial) \\ &= \partial \circ incl_n - (incl_{n-1} - h_{n-2}\partial) \circ \partial \\ &= (\partial \circ incl_n - incl_{n-1} \circ \partial \\ &= -h_{n-2} \circ \partial \circ \partial = 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

$(incl_n - h_{n-1}\partial)(\alpha)$ *est donc bien un cycle.*
Reste à construire ce cycle de manière à avoir :

$$\partial(h_n(\alpha)) = (incl_n - h_{n-1}\partial)(\alpha)$$

Construire une homotopie h_**, revient donc à remplir les cycles. C'est-à-dire, de résoudre, pour un cycle* α *(i.e :* $\partial\alpha = 0$*)), l'équation* $\alpha = \partial\beta$.
Dans ce qui suit, nous allons construire une telle homotopie en plusieurs étapes :

1. *On donne une formule explicite pour remplir des cycles dans un rayon géodésique*
2. *On étend la construction aux cycles situés dans un petit voisinage tubulaire d'un rayon géodésique en utilisant la projection orthogonale sur le rayon*

3. *Après avoir choisi une origine du graphe de Cayley, on applique la procédure précédente pour des géodésiques joignant le support du cycle à l'origine. Pour se faire, nous prenons la moyenne, au sens de Mineyev, de ces opérateurs. On obtient ainsi une homotopie contractante du complexe de Rips augmenté ne dépendant que faiblement du choix de l'origine.*

5.1 Remplissage de cycles près des segments géodésiques

Comme vu précédemment, construire une d'homotopie contractante d'un complexe de chaîne de Rips revient à établir une procédure de remplissage des cycles.
On construit d'abord une homotopie contractante de $C_*^R(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$, le complexe de Rips de l'espace métrique $\mathbb{N}$, interprété comme rayon géodésique discret.
Ensuite, en suivant une idée de Bader, Furman et Sauer, on utilise la projection orthogonale sur un rayon géodésique fixé pour remplir des cycles situés dans un petit voisinage tubulaire du rayon.

Lemme 5.1. *Il existe une homotopie contractante de complexes de chaînes*

$$\sigma_* : C_*(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \to C_{*+1}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$$

du complexe de chaîne de Bar augmenté de $\mathbb{N}$ telle que pour tout simplexe de Bar $\alpha_n \in \Delta_n(\mathbb{N})$ de dimension $n \geq 1$:

1. $Supp(\sigma(\alpha_n)) \subset geod(Supp(\alpha_n))$
2. $\|\sigma(\alpha_n)\|_1 \leq diam(Supp(\alpha_n))$
3. $\sigma(C_*^R(\mathbb{N}, \mathbb{Z})) \subset C_{*+1}^R(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ pour tout $R \in \mathbb{N}$ et $* \geq 1$

Preuve :

Construction de l'homotopie contractante Construisons σ_* par récurrence en posant pour les premiers indices :

1. $\sigma_{-1}(1) = [0]$
2. $\sigma_0([n]) = [0, 1] + ... + [n-1, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors :

$$\partial(\sigma_0(x)) = \partial(\sum_{i=0}^{N-1} [i, i+1]) = \sum_{i=0}^{N-1} \partial([i, i+1]) = \sum_{i=0}^{N-1} [i+1] - [i] = [N] - [0]$$

Ainsi $\partial\sigma_0 = Id - p_0$
Puis construisions les $\sigma_i, i > 0$ par récurrence.

Supposons les σ_i construits pour $0 \leq i < n$. On cherche σ_n vérifiant :

$$\partial\sigma_n + \sigma_{n-1}\partial = Id_{C_n(\mathbb{N},\mathbb{Z})}(*)$$

Soit l'application $s_x : C_*(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \to C_{*+1}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ définie par :

$$s_x([x_0, ..., x_n]) = [x, x_0, ..., x_n]$$

Définissons localement l'application :

$$\sigma_n([x_0, ..., x_n]) = s_{x_0}(Id_{C_n(\mathbb{N},\mathbb{Z})} - \sigma_{n-1}\partial)([x_0, ..., x_n])$$

Par cette construction, le diamètre du simplexe n'est pas augmenté. $(Id_{C_n(\mathbb{N},\mathbb{Z})} - \sigma_{n-1}\partial)([x_0, ..., x_n])$ est un cycle qui est rempli par la chaîne $\sigma_n([x_0, ..., x_n])$. Vérifions si σ_n vérifie bien l'égalité $(*)$ recherchée :

$$\partial\sigma_n + \sigma_{n-1}\partial = \partial(s_{x_0}(Id_{C_n(\mathbb{N},\mathbb{Z})} - \sigma_{n-1}\partial)) + \sigma_{n-1}\partial$$

D'après la Propriété 4.17 :

$$\partial s_{x_0} = Id_{C_*(\mathbb{N},\mathbb{Z})} - s_{x_0}\partial$$

Vérification des propriétés
Montrons maintenant que pour $n \geq 1$:

1. $$\sigma_n([x_0, \ldots, x_n]) = \begin{cases} (-1)^n \sum_{k=x_{n-1}+1}^{x_n} [x_0, \ldots, x_{n-1}, k-1, k], & x_n > x_{n-1}, \\ \\ (-1)^{n-1} \sum_{k=x_n+1}^{x_{n-1}} [x_0, \ldots, x_{n-1}, k-1, k], & x_n < x_{n-1} \end{cases}$$

   à des simplexes dégénérés près.
2. $Supp(\sigma_n(\alpha_n)) \subset geod(Supp(\alpha_n))$
3. $\|\sigma_n(\alpha_n)\|_1 \leq diam(Supp(\alpha_n))$
4. $\sigma(C_*^R(\mathbb{N},\mathbb{Z})) \subset C_{*+1}^R(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ pour tout $R \in \mathbb{N}$ et $* \geq 1$

Commençons par vérifier ces quatre propriétés au rang 1.
Supposons que $m \leq n$, alors :
$\sigma_1([m,n]) = s_m(Id - \sigma_0 \circ \partial)([m,n]) = s_m\,[m,n] - (s_m\sigma_0)(\partial\,[m,n])$
$= [m,m,n] - (s_{x_0}\sigma_0)([n] - [m]) = [m,m,n] - s_m(\sigma_0\,[n] - \sigma_0\,[m])$
$= [m,m,n] + s_m([0,1] + ...\,[m-1,m] - ([0,1] + ...\,[m-1,m] + [m,m+1] + ... + [n-1,n]))$
$= [m,m,n] - s_m([m,m+1] + ... + [n-1,n])$
$= [m,m,n] - ([m,m,m+1] + ... + [m,n-1,n])$
De même, si $m > n$:

$$\sigma_1([m,n]) = [m,m,n] + [m,n,n+1] + ... + [m,m-1,m]$$

Dans les deux cas :

$$Supp(\sigma_1([m,n])) = \{m, m+1, ..., n-1, n\}$$

Or $Supp([m,n]) = \{m,n\}$ donc :

$$Supp(\sigma_1([m,n])) = geod(Supp([m,n]))$$

Par ailleurs :

$$\|\sigma_1([m,n])\|_1 = \mid n-m \mid = diam([m,n])$$

Les quatre propriétés sont donc vraies pour $n=1$. Supposons les vraies au rang $n-1$ et montrons qu'elles restent vraies au rang n. Étudions par exemple le cas où $x_n > x_{n-1}$:

$\sigma_n([x_0,...,x_n]) = s_{x_0}([x_0,...,x_n] - \sigma_{n-1}\circ\partial([x_0,...,x_n]))$
$= [x_0,x_0,...,x_n] - s_{x_0}\sigma_{n-1}\circ\partial([x_0,...,x_n])$
$= -(\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i s_{x_0}\sigma_{n-1}([x_0,...,x_{i-1},x_i,...x_n])$
$= -s_{x_0}\sigma_{n-1}([x_1,...x_n])$ en négligeant les simplexes dégénérés
$= -s_{x_0}((-1)^{n-1}\sum\limits_{k=x_{n-1}+1}^{x_n}[x_1,\dots,x_{n-1},k-1,k])$ par hypothèse de récurrence
$= (-1)^n\sum\limits_{k=x_{n-1}+1}^{x_n}[x_0,\dots,x_{n-1},k-1,k]$

Il vient : $\|\sigma_n([x_0,...,x_n])\|_1 = \mid x_n - x_{n-1} - 1 \mid \leq diam(Supp(\alpha_n))$

La propriété est donc démontrée par récurrence □

Proposition 5.2. *Soit (G,S) un groupe $\delta-$ hyperbolique. Pour tout $(x,y)\in G^2$, il existe une application linéaire :*

$$\mu_{x,y} : C_*^R(G,\mathbb{Z}) \to C_{*+1}^R(G,\mathbb{Z})$$

telle que pour tout simplexe de Rips $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ vérifiant $Supp(\alpha)\subset B(geod\{x,y\},r)$:

1. $\mu_{x,y}\circ\partial + \partial\circ\mu_{x,y} = Id_{C_*(G,\mathbb{Z})}$
2. $\mu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+r+10\delta}(G,\mathbb{Z})$
3. $Supp(\mu_{x,y}(\alpha)) \subset (Supp(\alpha)\cup(geod\{x,y\})\cap G))\cap B(Supp(\alpha), R+r+7\delta)$
4. *pour tout simplexe de Rips $\alpha_k\in\Delta_k(G)$ on ait*

$$\|\mu_{x,y}(\alpha)\|_1 \leq C_5(R,r,k)$$

5. *la famille d'applications* $\{\mu_{x,y}, (x,y) \in G^2\}$ *est équivariante dans le sens où le diagramme suivant est commutatif pour tout* $g \in G$ *:*

$$\begin{tikzcd} C_*(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mu_{x,y}"] \arrow[d, "\pi(g)"] & C_{*+1}(G,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\pi(g)"] \\ C_*(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mu_{gx,gy}"] & C_{*+1}(G,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Remarque 5.3. 1. *L'inégalité 4 nous indique que la norme de* $\mu_{x,y}(\alpha)$ *ne dépend pas de la constante d'hyperbolicité* δ *et garantit un contrôle uniforme de la norme lorsque le simplexe reste proche de la géodésique.*

2. *En pratique, l'application* $\mu_{x,y}$ *ne nous intéressera que pour des simplexes proches de geod* $\{x,y\}$ *et de* y *en particulier,* x *jouera le rôle de point de base.*

Preuve : Fixons un bicombing (Cf.5.4) $\tilde{q}$, $G-$ équivariant, qui à chaque 1-simplexe dans $\Delta_1(G)$ associe un segment géodésique dans le graphe de Cayley $\Gamma = \mathscr{G}(G,S)$ joignant ses extrémités.
Soient x et $y \in G$.
Pour tout $z \in$ G , posons :

$$A_{x,y}(z) = \{u \in geod\{x,y\} \cap G, d(z,u) = d(z, geod\{x,y\} \cap G)\}$$

Si $u \in A_{x,y}(z)$ alors u est est un élément de G se trouvant sur un chemin reliant x à y sur le graphe de Cayley et à distance minimale de z.

Définissons maintenant l'application :

$$\varphi_{x,y} : G \to \mathbb{N}$$

telle que

$$\varphi_{x,y}(z) = d(x, A_{x,y}(z))$$

et soit $\varphi'(z) \in A_{x,y}(z)$ tel que $d(x,\varphi'(z)) = \varphi_{x,y}(z)$ (notons qu'un tel élément n'est pas nécessairement unique, on en choisit un pour définir φ') . Soit également :

$$\psi_{x,y} : \{0, ..., d(x,y)\} \to \Gamma$$

telle que :

$$\psi_{x,y}(d) = \tilde{q}([x,y])(d)$$

Par construction :

$$\varphi_{x,y}(G) = \{0, ..., d(x,y)\}$$

La composée $\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}$ est donc bien définie.

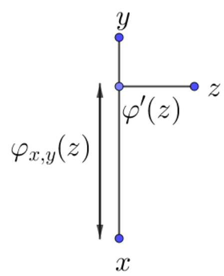

FIGURE 11 – Remarquons que $\varphi'(z) \in G$ n'est pas nécessairement unique car il peut exister plusieurs géodésiques entre x et y.

1ère étape : construction de l'homotopie

Posons :

$$\mu_{x,y} = \psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y} + h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)$$

σ étant l'application définie dans le Lemme 5.1 et h définie dans le Lemme 4.18 avec le prolongement :

$$\varphi_{x,y}([g_0, ..., g_n]) = [\varphi_{x,y}(g_0), ..., \varphi_{x,y}(g_n)] \in C_n(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$$

avec $\varphi_{x,y}(g_i) \in \{0, ..., d(x,y)\}$.
D'après le premier point du Lemme 5.1 :

$$Supp(\sigma([\varphi_{x,y}(g_0), ..., \varphi_{x,y}(g_n)])) \subset geod(Supp([\varphi_{x,y}(g_0), ..., \varphi_{x,y}(g_n)])) = geod(\varphi_{x,y}(g_0), ..., \varphi_{x,y}(g_n)) \subset \{0, ..., d(x,y)\}$$

$\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}$ est donc bien définie.
Remarque : $\varphi_{x,y}$ est définie sur G tout entier afin de faciliter des compositions futures, mais seules les images de valeurs proches de la géodésique nous intéresseront.

2ème étape : $\mu_{x,y}$ est une homotopie de complexes de chaînes contractante

Remarquons tout d'abord que :

1. $(\partial \circ \psi_{x,y})\,[n_0, ..., n_p]$
   $= \partial\,[\tilde{q}\,[x,y]\,(n_0), ..., \tilde{q}\,[x,y]\,(n_p)]$
   $= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,[\tilde{q}\,[x,y]\,(n_0), ..., \tilde{q}\,[x,y]\,(n_{i-1}), \tilde{q}\,[x,y]\,(n_{i+1}), ..., \tilde{q}\,[x,y]\,(n_p)]$

2. $(\psi_{x,y} \circ \partial)\,[n_0, ..., n_p]$
   $= \psi_{x,y}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,[n_0, ..., n_{i-1}, n_{i+1}, ..., n_p])$
   $= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,[\psi_{x,y}(n_0), ..., \psi_{x,y}(n_{i-1}), \psi_{x,y}(n_{i+1}), ..., \psi_{x,y}(n_p)]$

D'où $\partial \circ \psi_{x,y} = \psi_{x,y} \circ \partial$.
De la même manière, on démontre que $\varphi_{x,y} \circ \partial = \partial \circ \varphi_{x,y}$
Il vient :
$\mu_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \mu_{x,y}$
$= (\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y} + h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id))\partial + \partial(\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y} + h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id))$
$= \psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y} \circ \partial + h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id) \circ \partial + \partial \circ \psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y} + \partial \circ h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)$
$= \psi_{x,y} \circ \sigma \circ \partial \circ \varphi_{x,y} + \psi_{x,y} \circ \partial \circ \sigma \circ \varphi_{x,y} + \partial \circ h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id) + h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id) \circ \partial$
$= \psi_{x,y} \circ (\sigma \circ \partial + \partial \circ \sigma) \circ \varphi_{x,y} + (id - \psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y})$
$= id$

3ème étape : une majoration utile

Soient z et z' situés sur deux géodésiques $[x,y]$ et $[x,y]'$ reliant x à y tels que $d(x,z) = d(x,z')$ alors $d(z,z') \leq 2\delta$.
En effet, par hyperbolicité :

$$[x,y]' \subset B([x,y]\,,\delta)$$

Il existe donc $z'' \in [x,y]$ tel que $d(z',z'') \leq \delta$. Il vient :

$$d(z,z') \leq d(z,z'') + d(z'',z') = \mid d(z'',x) - d(z,x) \mid + d(z'',z')$$

car z et z'' sont tous deux sur $[x,y]$. Or :

$$\mid d(z'',x) - d(z,x) \mid = \mid d(z'',x) - d(z',x) \mid \leq d(z',z'') \leq \delta$$

Finalement : $d(z,z') \leq \mid d(z'',x) - d(z,x) \mid + d(z'',z') \leq \delta + \delta = 2\delta$

4ème étape : preuve de $\mu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+r+10\delta}(G,\mathbb{Z})$ si $Supp(\alpha) \subset B(geod\,\{x,y\}\,,r)$ et si α est de diamètre au plus R

Soit un simplexe $\alpha \in \Delta_k(G)$ de dimension $k \geq 1$ et de diamètre au plus R dont le support est contenu dans le $r-$voisinage de $geod\,\{x,y\}$.

$$diam(\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha)) \;=\; diam(\sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha)) \;\leq\; diam(\varphi_{x,y}(\alpha))$$

$$\leq\; diam(\alpha) + 10\delta \;\leq\; R + 10\delta \tag{1.34}$$

d'après Lemme 2.12 et par construction de $\varphi_{x,y}$.
Soit $z \in Supp(\alpha)$ alors $\varphi'(z) \in A_{x,y}(z) \subset geod(\{x,y\})$ est à distance minimale de x.
Soient $[x,y]$ et $[x,y]'$ des segments géodésiques tels que $\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}(z) \in [x,y]$ et $\varphi'(z) \in [x,y]'$. Étant donné que $d(x, \psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}(z)) = d(x, \varphi'(z))$, d'après la 3ème étape :

$$d(z, \psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}(z)) \;\leq\; d(z, \varphi'(z)) + d(\varphi'(z), \psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}(z)) \;\leq\; r + 2\delta$$

Rappelons que :

$$h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)([\alpha_0, ..., \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y})_i(\alpha_0, ..., \alpha_i), (\alpha_i, ..., \alpha_n)\right]$$

est une somme de simplexes de diamètre majoré par :

$$diam(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}(Supp(\alpha) \cup Supp(\alpha)) \leq R + r + 10\delta$$

On a de plus :

$$Supp(h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)(\alpha)) \;\subset\; B(Supp(\alpha), r + 2\delta)$$

Il vient :

$Supp(\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha))$
$\subset B(Supp(\alpha), r + 2\delta + \frac{1}{2} diam(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}(Supp(\alpha)))$
$\subset\; B(Supp(\alpha), R + r + 7\delta)$

Finalement, on a bien

$$\mu_{x,y} :\; C_*^R(\Gamma, \mathbb{Z}) \;\to\; C_{*+1}^{R+r+10\delta}(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

et

$$Supp(\mu_{x,y}(\alpha)) \;\subset\; B(Supp(\alpha), R + r + 7\delta).$$

5ème étape : montrons que $\|\mu_{x,y}(\alpha)\|_1 \leq C_5(R, r, k)$

$\|\mu_{x,y}(\alpha)\|_1 = \|\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha) + h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)(\alpha)\|_1$
$\leq \|\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha)\|_1 + \|h(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)(\alpha)\|_1$

$\leq \|\psi_{x,y}\| \, \|\sigma_k \circ \varphi_{x,y}(\alpha)\|_1 + \sum_{i=0}^{k} \|(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y})_j\| \, \|Id_{k-j}\|$

Or $\psi_{x,y}$ et $\varphi_{x,y}$ sont des morphismes de complexes qui à un simplexe associent un autre simplexe (une combinaison linéaire des simplexes est envoyée à une combinaison linéaire de simplexes avec les mêmes coefficients) donc :

$$\|\psi_{x,y}\|_1 = \|\varphi_{x,y}\|_1 = 1$$

De plus, d'après le deuxième point du Lemme 5.1 :

$$\|\sigma_k(\varphi_{x,y}(\alpha))\| \leq diam(Supp(\varphi_{x,y}(\alpha))$$

Il vient :

$\|\mu_{x,y}(\alpha)\|_1$
$\leq diam(\varphi_{x,y}(Supp(\alpha))) + (k+1)$
$\leq R + 10\delta + k + 1 = C_5(R, r, k)$

6ème étape : Commutativité du diagramme

G agissant de façon isométrique sur son graphe de Cayley, par construction de $\varphi_{x,y}$, on a pour tout $z \in G$:

$$\varphi_{gx,gy}(gz) = \varphi_{x,y}(z)$$

Par ailleurs, $\tilde{q}$ étant un bicombing $G-$équivariant, pour tout $k \in \{0, ..., d(x,y)\}$:

$$\psi_{gx,gy}(k) = g\psi_{x,y}(k)$$

Par construction, on peut étendre ces deux égalités à tout simplexe $\alpha \in C_*(G, \mathbb{Z})$. Il vient pour tout $g \in G$:

1. $g(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y})(\alpha) = g\psi_{x,y} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha) = \psi_{gx,gy} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha)$
2. $(\psi_{gx,gy} \circ \varphi_{gx,gy})(g\alpha) = \psi_{gx,gy} \circ \sigma \circ \varphi_{gx,gy}(g\alpha) = \psi_{gx,gy} \circ \sigma \circ \varphi_{x,y}(\alpha)$

Il vient :

$$g(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y})(\alpha) = (\psi_{gx,gy} \circ \varphi_{gx,gy})(g\alpha)$$

De plus :

$$\begin{gathered} gh(\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y}, id)([\alpha_0, ..., \alpha_n]) = \\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[(g\psi_{x,y} \circ \varphi_{x,y})_i(\alpha_0, ..., \alpha_i), (g\alpha_i, ..., g\alpha_n) \right] \\ = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[(\psi_{gx,gy} \circ \varphi_{x,y})_i(g\alpha_0, ..., g\alpha_i), (g\alpha_i, ..., g\alpha_n) \right] \\ = h(\psi_{gx,gy} \circ \varphi_{x,y}, id)(g\,[\alpha_0, ..., \alpha_n]) \end{gathered}$$

Par somme, il vient :

$$g(\mu_{x,y})(\alpha) = \mu_{gx,gy}(g\alpha)$$

D'où la commutativité du diagramme $\square$

5.2 Bicombing de Mineyev sur un groupe hyperbolique

Définition 5.4. *Un* ***bicombing homologique*** *dans* Γ *est une fonction qui à chaque paire orientée* (a,b) *de sommets dans* $\Gamma^{(0)}$ *associe une 1-chaîne* $q\,[a,b]$ *telle que* $\partial q\,[a,b] = b-a$.
Un $\mathbb{Q}-$ *bicombing est un bicombing homologique à coefficients dans* $\mathbb{Q}$.
On dit qu'un bicombing homologique est ***quasi géodésique*** *lorsque :*

1. *il existe* $r \geq 0$ *et un bicombing géodésique* p *tel que*

$$supp(q\,[a,b]) \subseteq V(p\,[a,b]\,,r) \text{ pour tous } a,b \in \Gamma^{(0)}$$

2. *il existe* $C \geq 0$ *tel que* $\parallel q\,[a,b] \parallel_1 \leq Cd(a,b)$ *pour tous* $a,b \in \Gamma^{(0)}$

Définition 5.5. *On se donne un bicombing* p *géodésique et* $\Gamma-$*équivariant dans* Γ.

1. *Si* a *est un sommet, on définit* $pr_a : \Gamma^{(0)} \to \Gamma^{(0)}$ *par :*
   (a) $pr_a(a) = a$
   (b) $pr_a(b) = p([a,b])(r)$ *où* r *est le plus grand multiple de* 10δ *strictement inférieur à* $d(a,b)$
2. *On pose* $Fl(a,b) = S(a,d(a,b)) \cap B(b,\delta) \subset \Gamma^{(0)}$
3. *La fonction* $f : G \times G \to C_0(G,\mathbb{Q})$ *telle que :*
   $f(a,b) =$
   (a) b *si* $d(a,b) \leq 10\delta$
   (b) $f(a,pr_a(b))$ *si* $d(a,b) > 10\delta$ *et* $d(a,b)$ *n'est pas un multiple de* 10δ
   (c) $\frac{1}{\sharp(Fl(a,b))} \sum\limits_{x \in S(a,d(a,b)) \cap B(b,\delta)} f(a,pr_a(x))$ *si* $d(a,b) > 10\delta$ *et* $d(a,b)$ *est un multiple de* 10δ
4. $star(a) = \frac{1}{\sharp B(a,7\delta)} \sum\limits_{x \in B(a,7\delta)} x$ *et star est prolongée pour les 0-chaînes par linéarité*
5. *la 0-chaîne* $\overline{f}(b,a)$ *est définie par* $\overline{f}(b,a) = star(f(b,a))$

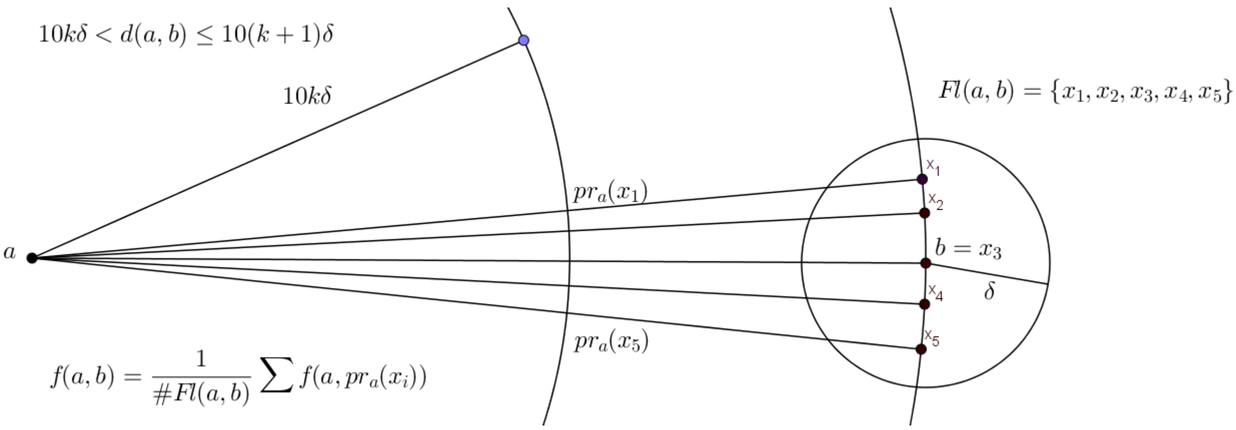

FIGURE 12 – $f(a,b)$ est défini par induction. Le procéssus décrit ci-dessus est donc ré-itéré jusqu'à ce que les sommets obtenus soient à une distance de a inférieure à 10δ : chaque $pr_a(x_i)$ donne lieu à une nouvelle "fleur" de Mineyev. Remarquons que $pr_a(x)$ est plus proche de a que ne l'était x et $f(a,x) = x$ si $d(a,x) \leq 10\delta$.

Lemme 5.6. *Soit (G,S) un groupe $\delta-$ hyperbolique, et Γ son graphe de Cayley. La fonction $f : G \times G \to C_0(G, \mathbb{Q})$ définie dans 5.5 vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$f(a,b)$ est une combinaison convexe de sommets*
2. *si $d(a,b) \geq 10\delta$ alors $Supp(f(a,b)) \subseteq Fl(a, p\,[a,b]\,(10\delta))$*
3. *si $d(a,b) \leq 10\delta$ alors $f(a,b) = b$*
4. *f est $G-$ équivariante, c'est-à-dire $f(ga,gb) = gf(a,b)$ pour tous sommets a et b dans Γ et tout $g \in G$*
5. *il existe des constantes $L \geq 0$ et $0 \leq \lambda < 1$ telles que pour tous sommets a, a', b dans Γ et :*

$$\|f(a,b) - f(a',b)\|_1 \leq L\lambda^{(a|a')_b}$$

Preuve : Cf. Proposition 3 dans [Mi] p. 813. Il est à noter que si

$$w = max\left\{card(B(v,\delta), v \in \Gamma^{(0)}\right\}$$

Alors $\lambda = (1 - \frac{1}{w^2})^{\frac{1}{10\delta}}$ et $L = 2(1 - \frac{1}{w^2})^{-3}\square$

Choisissons un bicombing géodésique p dans Γ. A partir de ce dernier, nous allons construire un nouveau bicombing possédant des propriétés intéressantes pour la suite.

La notation $p([g,g'])$ est définie pour g et g' des sommets. Mais, par linéarité, il est possible de l'étendre à toute 0-chaîne $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ de $C_0(G)$:

$$p(\left[\sum_{g\in G} \lambda_g g, g'\right]) = \sum_{g\in G} \lambda_g p([g,g']$$

On vérifie alors que $\partial p([a,b]) = b - a$ pour toutes 0-chaînes a et b. Dans [Mi] p. 822, Mineyev construit une application $\mathbb{Q}$ - linéaire

$$q' : C_1(G,\mathbb{Q}) \to C_1(G,\mathbb{Q})$$

par :

$$q'([a,b]) = \begin{cases} p([a,b]) & \text{si } d(a,b) \leq 10\delta \\ p(\left[a, \overline{f}(b,a)\right]) + p(\left[\overline{f}(b,a), b\right]) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\overline{f}(a,b) = star(f(a,b))$ est définie en 5.5

Définition 5.7. *Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{Q}$ admettant une base $\{v_i, i \in I\}$. On définit la norme l_1 sur V par :*

$$\| \sum_{i\in I} \lambda_i v_i \| = \sum_{i\in I} | \lambda_i |$$

Définition 5.8. *Désignons par E l'ensemble des arêtes de Γ. Alors E constitue une base de $C_1(\Gamma)$. Soit f une fonction définie sur E et $c \in C_1(\Gamma)$ une combinaison linéaire d'arêtes. Nous noterons :*

1. *$supp(f) = \overline{\{e \in E, f(e) \neq 0\}}$*
2. *$< c, e >$ le coefficient du vecteur de base e dans la combinaison linéaire des arêtes qui représente c.*

Lemme 5.9. *L'application $q' : C_1(\Gamma,\mathbb{Q}) \to C_1(\Gamma,\mathbb{Q})$ construite précédemment satisfait :*

1. *q' est un $\mathbb{Q}$ bicombing ;*
2. *q' est quasi géodésique ;*
3. *$\| q'[a,b] \|_1 \leq 18\delta d(a,b)$;*
4. *il existe une constante $N \geq 0$ telle que pour tous $a, b, c \in \Gamma^{(0)}$:*

$$\| q'[a,b] - q'[a,c] \|_1 \leq 18\delta d(b,c) + N$$

Preuve : [Mi] Proposition 8 p. 823.

Lemme 5.10. *Pour tous sommets $a, b \in \Gamma^{(0)}$ et pour toute arête e :*

$$|< q' [a, b] , e >| \leq 2003\delta^2$$

Preuve : [MMS] Proposition 11 p. 8.

Lemme 5.11. *Soit une arête orientée $e \in E$, nous noterons e_- le sommet à l'origine de e.*
Il existe deux constantes $S_1 = S_1(\delta, | S |) \geq 0$ et $\sigma_1 = \sigma_1(\delta, | S |)\sigma_1 \in [0; 1[$ telles que pour tous sommets a, b, b' tels que $d(b, b') \leq 1$ et toute arête $e \in E$:

$$|< q' [a, b] - q' [a, b'] , e >| \leq S_1 \sigma_1^{d(e_-, b)}$$

Preuve : [MMS] Proposition 13 p. 12. On vérifie que les différentes constantes construites ne dépendent que de δ et du cardinal de S $\square$

Lemme 5.12. *Il existe deux constantes $S_2 = S_2(\delta, | S |) \geq 0$ et $\sigma_2 = \sigma_2(\delta, | S |)\sigma_1 \in [0; 1[$ telles que pour tous sommets a, b, b' tels que $d(a, a') \leq 1$ et toute arête $e \in E$:*

$$|< q' [a, b] - q' [a', b] , e >| \leq S_2 \sigma_2^{d(e_-, a)}$$

Preuve : [MMS] Proposition 15 p. 14.On vérifie que les différentes constantes construites ne dépendent que de δ et du cardinal de S $\square$

Théorème 5.13. *Soient G un groupe hyperbolique et Γ son graphe de Cayley. Alors, il existe un $\mathbb{Q}-$ bicombing q dans Γ tel que :*

1. *q est quasi géodésique*
2. *q est $G-$équivariant*
3. *$Supp(q([a, b])) \subset \mathscr{B}(geod(\{a, b\}), 18\delta)$*
4. *Si $[a, b] \in \Delta_1^R(G)$ alors : $\|q([a, b])\|_1 \leq 18\delta R$*

Preuve : La preuve se trouve dans [Mi], Théorème 10 p.832.
q est défini de la façon suivante :

$$q [a, b] = \tfrac{1}{2}(q' [a, b] - q' [b, a])$$

où q' est l'application construite précédemment. On remarque en particulier que q est anti-symétrique : $q [a, b] = -q [b, a]$
Pour le dernier point :

$\|q([a, b])\|_1 \leq \frac{1}{2}(\|q'([a, b])\|_1 + \|q'([b, a])\|_1)$
$\leq \frac{1}{2}(18\delta d(a, b) + 18\delta d(b, a))$ d'après 5.9
$\leq 18\delta d(a, b)$
$\leq 18\delta R$ car $[a, b] \in \Delta_1^R(G)$ $\square$

Proposition 5.14. *Soit q le $\mathbb{Q}-$ bicombing précédemment construit. Soient deux sommets $x, y \in \Gamma$ et une arête orientée $[u, v] \in \Delta_1^1(1, d_S)$ dans le graphe de Cayley.*
Alors il existe des constantes $C_0 = C_0(\delta) > 0, C_{01} = C_{01}(\delta, \mid S \mid) > 0$ et $\lambda_1 = \lambda_1(\delta, \mid S \mid) < 1$ telles que :

1. $|< q([z, x]), [u, v] >| \leq C_0$
2. $|< q([z, x]) - q([z, y]), [u, v] >| \leq C_1.d(x, y).\lambda_1^{(x|y)_u}$

Preuve :
Pour la **première inégalité**, d'après 5.10 :

$$|< q([z,x]), [u,v] >| = |< \frac{1}{2}(q'([z,x]) - q'([x,z])), [u,v] >| = \frac{1}{2} |< (q'([z,x]), [u,v] > - < q'([x,z])), [u,v] >| \leq \frac{1}{2}(|< (q'([z,x]), [u,v] >| + |< q'([x,z])), [u,v] >|) \ \leq \frac{1}{2} \times 2 \times 2003\delta^2$$

Il suffit donc de poser $C_0 = 2003\delta^2$.

Intéressons nous maintenant à la **deuxième inégalité**.

$$|< q([z,x]) - q([z,y]), [u,v] >| = \frac{1}{2} |< q'([z,x]) - q'([x,z]) - q'([z,y]) + q'([y,z]), [u,v] >| \leq \frac{1}{2} |< q'([z,x]) - q'([z,y]), [u,v] >| + \frac{1}{2} |< q'([y,z]) - q'([x,z]), [u,v] >|$$

Supposons tout d'abord que $d(x, y) = 1$. Alors, d'après 5.11 et 5.12 :

1. $|< q'([z, x]) - q'([z, y]), [u, v] >| \leq S_1\sigma_1^{d(u,x)}$
2. $|< q'([y, z]) - q'([x, z]), [u, v] >| \leq S_2\sigma_2^{d(u,x)}$

D'où :

$$|< q([z,x]) - q([z,y]), [u,v] >| \leq S_3\sigma_3^{d(u,x)}$$

avec $S_3 = max(S_1, S_2 \geq 0)$ et $\sigma_3 = max(\sigma_1, \sigma_2) < 1$.

Soient maintenant deux sommets quelconques $x, y \in \Gamma$. Désignons par $x_1 = x, x_2, ..., x_{N-1}, x_N = y$ les sommets deux à deux consécutifs tels que les segments $[x_i, x_{i+1}]$ joignent x et y dans le graphe de Cayley par une géodésique.
Les sommets étant consécutifs dans le graphe :

1. $d(x_i, x_{i+1}) = 1$. L'inégalité précédente est donc vraie :
$$|< q([z,x_i]) - q([z,x_{i+1}]), [u,v] >| \leq S_3\sigma_3^{d(u,x_i)}$$
2. $d(x, y) = N - 1$

3. $\{x_1, ..., x_N\} \subset geod(\{x, y\})$

Il vient :

$$|< q([z,x]) - q([z,y]), [u,v] >| = |< \sum_{i=1}^{N-1} q([z,x_i]) - q([z,x_{i+1}]), [u,v] >| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} |< q([z,x_i]) - q([z,x_{i+1}]), [u,v] >| \leq \sum_{i=1}^{N-1} S_3 \sigma_3^{d(u,x_i)}$$

Or $0 \leq \sigma_3 < 1$ donc pour tout $i \in \{1, ..., N-1\}$:

$$\sigma_3^{d(u,x_i)} \leq \sigma_3^{min(d(u,x_i), i \in \{1,...,N-1\}}) \leq \sigma_3^{d(u,geod(\{x,y\})}$$

Finalement :

$$|< q([z,x]) - q([z,y]), [u,v] >| \leq \sum_{i=1}^{N-1} S_3 \sigma_3^{d(u,geod(\{x,y\})} =$$

$$(N-1) S_3 \sigma_3^{d(u,geod(\{x,y\})} = d(x,y) S_3 \sigma_3^{d(u,geod(\{x,y\})}$$

Or, d'après l'inégalité 2.20 :

$$d(u, geod(\{x,y\}) \geq (x \mid y)_u$$

Donc :

$$|< q([z,x]) - q([z,y]), [u,v] >| \leq d(x,y) S_3 \sigma^{(x|y)_u} = d(x,y)(S_3\sigma)\sigma_3^{(x|y)_u}$$

Il suffit donc de poser $C_{01} = S_3\sigma$ et $\lambda_1 = \sigma_3$ pour vérifier l'inégalité annoncée
□

Remarque 5.15. *Par le procédé de construction du bicombing de Mineyev, le voyage de b vers a se fait en deux temps :*

1. *Émission par a de signaux pour guider b, ces signaux sont les $f(a, pr_a(x))$*

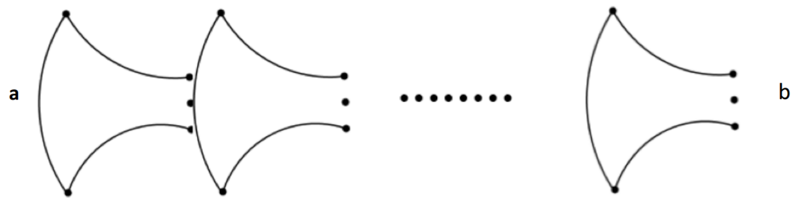

Figure 13 – Succession de Fleurs de Mineyev : émission des signaux par a pour guider b. Les signaux sont représentés en pointillés.

2. *b se déplace vers les signaux et entreprend un voyage sur une distance de 10δ vers a en suivant le bicombing.*

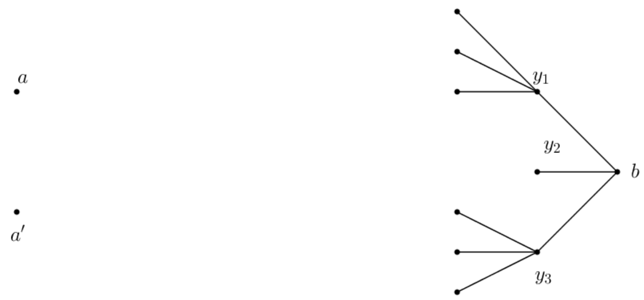

FIGURE 14 – Chaque y_i (lui-même un signal) demande à nouveau des signaux à a afin de se déplacer vers a.
Il est à noté que si l'on remplace a par a' alors les signaux seront presque les mêmes et donc le bicombing construit également.

5.3 Contractions continues près des segments géodésiques

L'algorithme de remplissage construit précédemment est simple, mais présente un inconvénient : il est très sensible au choix du segment géodésique $[x, y]$ d'origine x choisi dans sa construction.
Pour un cycle donné, il existe plusieurs géodésiques proches. Si on change l'origine de la géodésique choisie, nous aboutirons à un nouveau remplissage du cycle. D'où une perte de la continuité en norme de l'opérateur. Cette continuité sera primordiale pour, plus tard, établir le caractère finiment sommable du module de Fredholm construit.
Il va s'agir ici d'affiner la construction précédente afin d'obtenir un remplissage dépendant "continuellement" du choix de l'origine x. Pour cela, la méthode adoptée est basée sur le travail de Mineyev sur les bicombings homologiques pour les groupes hyperboliques. Suivant sa procédure de moyenne δ-locale itérative, nous remplaçons l'homotopie de chaîne associée à la géodésique initiale par une combinaison convexe d'homotopies de chaînes (qui reste une homotopie de chaîne). Les combinaisons convexes sont réalisées en découpant le cycle en "tranches" selon la distance à l'origine. Cela nécessite d'introduire un remplissage en tranches du cycle donné en remplaçant la géodésique auxiliaire par la 1-chaîne du bicombing de Mineyev.
Par ailleurs, les considérations géométriques utilisées lors de cette construction permettront une bonne estimation des coefficients de matrices (ce qui permettra de prouver plus tard le caractère finiment sommable ainsi que le degré p de sommabilité du bimodule).

Proposition 5.16. *(Mineyev) Soient (G, S) un groupe $\delta-$ hyperbolique et Γ*

son graphe de Cayley. On désigne par $p\,[a,b]$ une géodésique $G-$équivariante de a à b dans Γ entre deux sommets a et b. Il existe une famille d'applications

$$f_k : G\times G \to C_0(G,\mathbb{Q}), k\geq 1$$

vérifiant, pour tous $a,b,c\in G$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$ les propriétés suivantes :

1. *$f_k(a,b)$ est une combinaison convexe de sommets*
2. *si $d(a,b)\leq 10k\delta$ alors $f_k(a,b)=b$*
3. *si $d(a,b)>10k\delta$ alors*
$$Supp(f_k(a,b))\subseteq S(a,10k\delta)\cap B(geod(\{a,b\}),\delta)$$
4. *f_k est $G-$ équivariante, c'est-à-dire $f(ga,gb)=gf(a,b)$ pour tous sommets a et b dans Γ et tout $g\in G$*
5. *il existe des constantes $C_6(\delta,\mid S\mid)\geq 0$ et $0\leq\lambda_3(\delta,\mid S\mid)<1$ telles que pour tous sommets a,b,c dans Γ :*
$$\|f_k(a,b)-f_k(a,c)\|_1\leq C_6\lambda_3^{(b|c)_a-10k\delta}$$

Preuve : Pour $k=1$, l'application f_1 correspond à la fonction f du Lemme 5.6. Si $k\geq 2$ on définit à l'identique la fonction

$$f_k : G\times G\to C_0(G,\mathbb{Q})$$

telle que :
$f_k(a,b)=$

1. b si $d(a,b)\leq 10k\delta$
2. $f_k(a,pr_a(b))$ si $d(a,b)>10k\delta$ et $d(a,b)$ n'est pas un multiple de 10δ
3. $\frac{1}{\sharp(S(b,d(a,b))\cap B(b,\delta)}\sum\limits_{x\in S(b,d(a,b))\cap B(b,\delta)} f(a,pr_a(x))$ si $d(a,b)>10k\delta$ et $d(a,b)$ est un multiple de 10δ

La preuve est la même que celle du Lemme 5.6 et les constantes demeurent identiques $\square$

Remarque 5.17. *Pour tout $k\in\mathbb{N}^*, f_k(a,b)$ se trouve à une distance de $geod\,\{a,b\}$ inférieure à δ.*

Proposition 5.18. *Soit (G,S) un groupe $\delta-$ hyperbolique. Pour tout $(x,y)\in G^2$, il existe un opérateur linéaire :*

$$\nu_{x,y} : C_*(G,\mathbb{Q})\to C_{*+1}(G,\mathbb{Q})$$

tel que pour tout simplexe de Bar $\alpha \in \Delta_k(G)$, avec $k \geq 1$, de diamètre au plus R vérifiant $Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\}, r)$:

1. $\nu_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y} = Id_{C_*(G,\mathbb{Z})}$
2. $\nu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+4r+12\delta}(G,\mathbb{Q})$
3. $Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset Supp(\alpha) \cup B(geod\{x,y\}, 2\delta)$
4. $Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), 2R + 6r + 16\delta)$
5. $\|\nu_{x,y}(\alpha)\|_1 \leq C_7(\delta, R, r, k)$
6. *la famille d'applications $\{\nu_{x,y}, (x,y) \in G^2\}$ est équivariante dans le sens où le diagramme suivant est commutatif pour tout $g \in G$:*

$$\begin{array}{ccc} C_*(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\nu_{x,y}} & C_{*+1}(G,\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi(g)} \\ C_*(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\nu_{gx,gy}} & C_{*+1}(G,\mathbb{Z}) \end{array}$$

7. *les applications $\nu_{x,y}$ sont continues dans le sens où si x' est un autre point de base et si α est un simplexe de Bar ayant les mêmes propriétés que ci-dessus, alors :*

$$\|(\nu_{x,y} - \nu_{x',y})(\alpha)\|_1 \leq C_{11}(\delta, | S |, R, r, k, d(x,x'))\lambda_3^{d(x,y)-d(Supp(\alpha),y)}$$

Remarque 5.19. *L'image d'un sous-complexe de Rips par $\nu_{x,y}$ est un sous complexe de Rips de diamètre supérieur. Il n'y a donc pas conservation d'un complexe de Rips donné.*

Preuve :

Soit $Y \subset G$, on définit l'opérateur linéaire

$$\chi[Y] : C_*(G,\mathbb{Q}) \to C_*(G,\mathbb{Q})$$

tel que pour $\alpha \in \Delta_k(G)$:

$$\chi[Y](\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } Supp(\alpha) \subset Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient $x, y \in G$, on définit une famille $(\nu_{x,y}^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs :

$$\nu_{x,y}^{(j)} : C_*(G,\mathbb{Q}) \to C_{*+1}(G,\mathbb{Q})$$

Par :

$$\nu_{x,y}^{(j)} = \mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \chi\left[B(y, 10j\delta)\right]$$

où f_{j+1} est définie dans Proposition 5.16 et $\mu_{x',y}$ est défini dans Proposition 5.2.
Or, d'après le premier point de 5.16, $f_{j+1}(y,x)$ est une combinaison linéaire convexe de sommets $z_l \in \Gamma^{(0)}$.

Notation : $\sum_l c_l \mu_{z_l,y}$ sera noté $\mu_{f_{j+1}(y,x),x}$ si $f_{j+1}(y,x) = \sum_l c_l\left[z_l\right] \in C_0(G, \mathbb{Q})$ avec $\sum_l c_l = 1$

1ère étape :

Soient $\alpha \in \Delta_k(G)$ et $v \in Supp(\alpha) \subset B(geod\left\{x,y\right\}, r)$.
Nous supposerons dans ce qui suit que $Supp(\alpha) \subset B(y, 10j\delta)$ (car autrement $\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha) = 0)$).
Soit $w \in geod\left\{x,y\right\}$ tel que $d(w,v) = d(geod\left\{x,y\right\}, v)$. Nous noterons $[w,v]$ une géodésique reliant v à w.
Estimons $d(w,y)$.

1er cas : Si $d(w,y) > 10j\delta + \delta$.
On sait que $d(v,y) \leq 10j\delta$ et que $d(w,y) > 10j\delta + \delta$. Soit $z \in [w,v]$, alors $d(z,y)$ prendra au moins une valeur entière supérieure ou égale à $10j\delta + \delta$.
Il existe donc $u \in [w,v]$ tel que $10j\delta + \delta < d(u,y) < 10j\delta + \delta + 1$
Supposons que $d(u,[y,v]) \leq \delta$. Soit un point $t \in [y,v]$ tel que $d(t,u) = d(u,[y,v])$. Alors :

$$d(u,y) \leq d(u,t) + d(t,y)$$

Or $d(t,y) \leq d(v,y) \leq 10j\delta$ car $t \in [y,v]$. D'où :

$$d(u,y) \leq d(u,t) + d(t,y) \leq \delta + 10j\delta$$

Ce qui est contradictoire avec $10j\delta + \delta < d(u,y)$.
On vient de montrer que $d(u,[y,v]) > \delta$. Or, par hyperbolicité :

$$d(u,[y,w] \cup [y,v]) \leq \delta$$

D'où nécessairement $d(u,[y,w]) \leq \delta$.
$w \in [x,y]$ donc :

$$d(u, geod\left\{x,y\right\}) \leq d(u,w) \leq \delta$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
& d(u,w) \\
&= d(v,w) - d(u,v) = d(v, geod\{x,y\}) - d(u,v) \\
&\leq d(v,u) + d(u, geod\{x,y\}) - d(u,v) \leq d(u, geod\{x,y\}) \leq \delta
\end{aligned}
$$

Il vient finalement :

$$d(y,w) \leq d(w,u) + d(u,y) \leq \delta + 10j\delta + \delta + 1 = 10j\delta + 2\delta + 1$$

2ème cas : Si $d(w,y) \leq 10j\delta + \delta$ alors à fortiori $d(y,w) \leq 10j\delta + 2\delta + 1$

Dans tous les cas, on a $d(y,w) \leq 10j\delta + 2\delta + 1$

2ème étape : soit $z \in Supp(f_{j+1}(y,x))$, estimons la distance de $Supp(\alpha)$ à $geod\{z,y\}$
Par construction :

$$f_{j+1}(y,x) = \begin{cases} x \text{ si } d(x,y) \leq 10(j+1)\delta \\ Supp(f_{j+1}(y,x) \subset S(y, 10(j+1)\delta) \cap B(geod(\{x,y\}), \delta) \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les deux cas :

$$d(z, geod\{x,y\}) \leq \delta \text{ et } d(z,y) \geq 10(j+1)\delta$$

Soit donc z'' à distance minimale de $geod\{x,y\}$. Alors il existe une géodésique particulière, notée $[x,y]'$ contenant z'' et telle que

$$d(z,z'') = d(z, geod\{x,y\}) \leq \delta$$

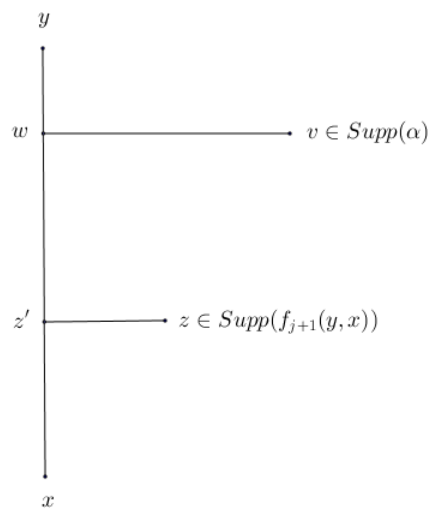

FIGURE 15 – $Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r+\delta)$
Seule la géodésique $[x,y]$
est ici représentée.

Soit $v \in Supp(\alpha)$ et soit $w \in geod\{x,y\}$ à distance minimale de v. Alors il existe une géodésique particulière, notée $[x,y]$ contenant w et telle que $d(v,w) = d(v, geod\{x,y\})$.
Par hyperbolicité dans le triangle dégénéré $[x,y] \cup [x,y]'$:

$$d(z'', [y,y'] \cup [x,y]) \leq \delta \Longleftrightarrow d(z'', [x,y]) \leq \delta$$

Il existe donc $z' \in [x,y]$ tel que $d(z',z'') \leq \delta$. Il vient :

$$d(z,z') \leq d(z,z'') + d(z'',z') \leq 2\delta$$

Par inégalité triangulaire : $d(z',y) \geq d(z,y) - d(z,z')$. Il vient :

$$\begin{gathered} d(z',y) - d(w,y) \geq d(z,y) - d(z,z') - d(w,y) \\ > 10(j+1)\delta - 2\delta - (10j\delta + 2\delta + 1) = 6\delta - 1 > 4\delta > 0 \text{ car } \delta \in \mathbb{N}^* \end{gathered}$$

D'où $d(w,y) \leq d(z',y)$ et $d(w,z') \geq d(z',y) - d(w,y) > 4\delta > \delta$.

Par ailleurs, z' et y appartiennent tous deux à $[x,y]$ donc $w \in [z',y]$. Ainsi :

$$d(w, geod\{z,y\}) \leq d(w, [z,y])$$

Or, par hyperbolicité dans le triangle $[z,z'] \cup [y,z]$:

$$d(w, [z,z'] \cup [y,z]) \leq \delta$$

Mais $d(w,[z,z']) > \delta$, d'où $d(w,[y,z]) \leq \delta$

$$d(w, geod\{z,y\}) \leq d(w,[z,y]) \leq \delta$$

Finalement :

$$d(v, geod\{z,y\}) \leq d(v,w) + d(w, geod\{z,y\}) \leq r + \delta$$

Nous avons donc démontré que :

$$Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r+\delta)$$

3ème étape : Montrons que $Supp(\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha) \subset B(y, 5\delta + r')$ **lorsque** $Supp(\alpha) \subset B(y,r')$.

a) Montrons que $Supp(\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha)) \subset B(geod\{x,y\}, 2\delta) \cup Supp(\alpha)$

Rappelons que $\nu_{x,y}^{(j)} = \mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \chi[B(y, 10j\delta)]$. De plus, nous avons montré dans la Proposition 5.2 4ème étape b) que :

$$Supp(\mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha)) \subset \psi_{f_{j+1}(y,x),y}(geod(\varphi_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha))) \cup Supp(\alpha)$$
$$\subset \bigcup_{z\in f_{j+1}(y,x)} Im(\psi_{z,y}) \cup Supp(\alpha)$$

Or :

1. $Im(\psi_{z,y}) \subset geod\{z,y\}$ par construction
2. $z \in Supp f_{j+1}(y,x) \subset B(geod\{y,x\}, \delta)$ d'après 5.16

Soit $w \in geod\{x,y\}$ tel que $d(z,w) = d(z, geod\{x,y\})$ et soit $[x,y]$ une géodésique telle que $w \in [x,y]$.
Soit $z' \in geod\{z,y\}$ et soit $[y,z]$ une géodésique quelconque entre y et z. Alors, par hyperbolicité dans le triangle $[y,w]\cup[y,z]$, une des deux inégalités au moins est vérifiée :

1. $d(z',[w,y]) \leq \delta$ et par conséquent $d(z',[x,y]) \leq d(z',[w,y] \leq \delta$
2. $d(z',[w,z]) \leq \delta$ et par conséquent, si $z'' \in [w,z]$ tel que $d(z',[w,z]) = d(z',z'')$ alors :
$$d(z',[x,y]) \leq d(z',z'') + d(z'',w) \leq \delta + d(z,w) \leq 2\delta$$

Dans les deux cas $d(z',[x,y]) \leq 2\delta$ donc $d(z', geod\{x,y\}) \leq d(z',[x,y]) \leq 2\delta$ et

$$Im(\psi_{z,y}) \subset geod\{z,y\} \subset B(geod\{x,y\}, 2\delta)$$

Il vient :

$$Supp(\mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha)) \subset B(geod\{x,y\}, 2\delta) \cup Supp(\alpha)$$

b) Montrons que $Supp(\nu^{(j)}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R + 2r + 4\delta)$

D'après le troisième point de la Proposition 5.2 :

$$Supp(\nu^{(j)}_{x,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R + 2r + 2\delta) \text{ si } Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\}, r)$$

Or nous avons montré dans la deuxième étape que $Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r+\delta)$ si $z \in Supp(f_{j+1}(y,x))$. Donc :

$$Supp(\nu^{(j)}_{z,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R + 2(r+\delta) + 2\delta) = B(Supp(\alpha), R + 2r + 4\delta)$$

c) Montrons que $Supp(\alpha) \subset B(y,r') \Longrightarrow Supp(\nu^{(j)}_{x,y}(\alpha)) \subset B(y, r' + 5\delta)$

Supposons $Supp(\alpha) \subset B(y,r')$. Soient $v \in Supp(\alpha)$ et $z \in Supp(f_{j+1}(y,x))$. Soit $\varphi''(v) \in A_{z,y}(v)$ tel que défini dans la preuve de 5.2 à distance minimale de z. Parmi toutes les géodésiques, choisissons trois segments $[v,\varphi''(v)]$,$[\varphi''(v),y]$ et $[v,y]$. Par hyperbolicité et par connexion des segments entre eux (Cf 2.9), il existe $u \in [v,\varphi''(v)]$ tel que :

$$d(u,[v,y]) \leq \delta \text{ et } d(u,[\varphi''(v),y]) \leq \delta$$

Par construction de φ'' :

$$d(u,\varphi''(v)) \leq d(u, geod\{z,y\}) + 1 \leq d(u,[\varphi''(v),y]) + 1 \leq \delta + 1$$

Par ailleurs, $Supp(\alpha) \subset B(y,r')$ et $u' \in [v,y]$ donc :

$$d(u',y) \leq d(v,y) \leq r'$$

Soit $u' \in [v,y]$ tel que $d(u,u') \leq \delta$, alors :

$$\begin{aligned} d(\varphi''(v),y) &\leq d(\varphi''(v),u) + d(u,u') + d(u',y) \\ &\leq (\delta+1) + \delta + r' = 2\delta + 1 + r' \end{aligned}$$

On sait que $\varphi''(v) \in geod\{z,y\}$, que $\psi_{z,y} \circ \varphi_{z,y}(v),y) \in geod\{z,y\}$ et que $d(z, \psi_{z,y} \circ \varphi_{z,y}(v),y)) = d(z,\varphi''(v))$ donc, d'après la 3ème étape de la Proposition 5.2 :

$$d(\psi_{z,y} \circ \varphi_{z,y}(v), \varphi''(v)) \leq 2\delta$$

Il vient :

$$\begin{gathered} d(\psi_{z,y} \circ \varphi_{z,y}(v),y) \leq d(\psi_{z,y} \circ \varphi_{z,y}(v),\varphi''(v)) + d(\varphi''(v),y) \leq \\ 2\delta + 2\delta + 1 + r' = 4\delta + 1 + r' \end{gathered}$$

Par conséquent :

$$geod\{\psi_{z,y} \circ \varphi_{z,y}(v), y\} \subset B(y, 4\delta + 1 + r')$$

Finalement :

$$\begin{gathered} Supp(\nu_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha)) \subset Supp(\mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha)) \\ \subset Supp(\alpha) \cup \psi_{f_{j+1}(y,x),y}(geod\varphi_{f_{j+1}(y,x),y}(Supp(\alpha)) \\ \subset Supp(\alpha) \cup \bigcup_{z \in Supp(f_{j+1}(y,x))} \psi_{z,y}(geod\varphi_{z,y}(Supp(\alpha)) \\ \subset Supp(\alpha) \cup \bigcup_{z \in Supp(f_{j+1}(y,x)), v \in Supp(\alpha)} geod\{\psi_{z,y}(\varphi_{z,y}(v)), y\} \\ \subset B(y,r') \cup B(y, 4\delta + 1 + r') \subset B(y, 5\delta + r') \end{gathered}$$

4ème étape : Nous savons, d'après les points 2 et 4 de la Proposition 5.2, que $\mu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+2r+2\delta}(G,\mathbb{Z})$ et que $\|\mu_{x,y}(\alpha)\|_1 \leq C_5(R,r,k)$ si $Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\},r)$.
Or, d'après la 2ème étape ci-dessus : $Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r+\delta)$ si $z \in Supp(f_{j+1}(y,x))$. Donc :

$$\nu^{(j)}_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha) \in C_*^{R+2(r+\delta)+2\delta} = C_*^{R+2r+4\delta}(G,\mathbb{Q})$$

et

$$\left\|\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha)\right\|_1 \leq C_5(R, r+\delta, k)$$

5ème étape : Définition de la contraction

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, définissons l'application de chaîne

$$\phi_{x,y}^{(j)} : C_*(G,\mathbb{Q}) \to C_*(G,\mathbb{Q})$$

par :

$$\phi_{x,y}^{(j)} = Id - (\nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y}^{(j)})$$

Puis définissons $\nu_{x,y} : C_*(G,\mathbb{Q}) \to C_*(G,\mathbb{Q})$ par :

$$\nu_{x,y} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ \ldots \circ \phi_{x,y}^{(1)}$$

Par la suite, nous allons établir une formule explicite pour l'image d'un simplexe α par $\nu_{x,y}$. Nous montrerons que la plupart des termes de la somme s'annulent et que ainsi $\nu_{x,y}$ est bien définie pour tout simplexe.

6ème étape : Expression explicite de la contraction

a) Expression de $\phi_{x,y}$

$$\begin{aligned}\phi_{x,y}^{(j)} &= Id - (\nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y}^{(j)}) \\ &= Id - (\mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \chi_{B(y,10j\delta)} \circ \partial + \partial \circ \mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \chi_{B(y,10j\delta)}) \\ &= Id - (\mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \partial + \partial \circ \mu_{f_{j+1}(y,x),y}) \circ \chi_{B(y,10j\delta)} \\ &\quad -\mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ (\chi_{B(y,10j\delta)} \circ \partial - \partial \circ \chi_{B(y,10j\delta)})\end{aligned}$$

Or $\mu_{f_{j+1}(y,x),y} = \sum_l c_l \mu_{z_l,y}$ avec $\sum_l c_l = 1$. Donc :

$$\begin{aligned}\mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \partial + \partial \circ \mu_{f_{j+1}(y,x),y} &= \sum_l c_l \mu_{z_l,y} \circ \partial + \partial \circ \sum_l c_l \mu_{z_l,y} \\ &= \sum_l c_l (\mu_{z_l,y} \circ \partial + \partial \circ \mu_{z_l,y}) = \sum_l c_l Id = Id\end{aligned}$$

car, d'après le premier point de 5.2 : $\mu_{z_l,y} \circ \partial + \partial \circ \mu_{z_l,y} = Id$.
Il vient :

$$\phi_{x,y}^{(j)} = Id - \chi_{B(y,10j\delta)} - \mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ (\chi_{B(y,10j\delta)} \circ \partial - \partial \circ \chi_{B(y,10j\delta)})$$

Pour tout simplexe α, remarquons que, par définition de l'opérateur de bord : $Supp(\partial\alpha) = Supp(\alpha)$. Afin de déterminer $\phi^{(j)}_{x,y}(\alpha)$, trois cas vont être à envisager :

1. si $Supp(\alpha) \subset B(y, 10j\delta)$ alors :
$$\phi^{(j)}_{x,y}(\alpha) = \alpha - \alpha - \mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\partial\alpha - \partial\alpha) = 0$$
2. si $d(y, Supp(\alpha)) > 10j\delta$ alors :
$$\phi^{(j)}_{x,y}(\alpha) = \alpha - 0 - \mu_{f_{j+1}(y,x),y}(0 - 0) = \alpha$$
3. si une partie du support est à l'intérieur de $B(y, 10j\delta)$ et l'autre à l'extérieur. Soit le plus petit entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $Supp(\alpha) \subset B(y, 10m\delta)$. Posons $\alpha = [x_0, ..., x_n]$ et soit $i_0 \in \{0, ..., n\}$ tel que x_{i_0} soit à distance maximale de y.
Nous savons que $Supp(\partial_{i_0\alpha}) = Supp(\alpha) - \{x_{i_0}\}$. Soit alors le plus petit entier $l \leq m$ tel que $Supp(\partial_{i_0\alpha}) \subset B(y, 10l\delta)$. Alors tous les x_i appartiennent à $B(y, 10l\delta)$ à l'exception de x_{i_0}.
Supposons que $l \leq j < m$ alors $\partial_i(\alpha) \in B(y, 10g\delta) \Longleftrightarrow i = i_0$ et :
$$\begin{aligned}\phi^{(j)}_{x,y}(\alpha) &= \alpha - \chi_{B(y,10j\delta)}(\alpha) - \mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\chi_{B(y,10j\delta)}(\partial\alpha) - \partial(\chi_{B(y,10j\delta)}(\alpha)))\\ &= \alpha - 0 - \mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\chi_{B(y,10j\delta)}(\partial\alpha) - \partial(0)\\ &= \alpha - \mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\chi_{B(y,10j\delta)}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i(\alpha)))\end{aligned}$$
$$= \alpha - \mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\chi_{B(y,10j\delta)}(\partial_i(\alpha)))) \text{ par linéarité de } \chi_{B(y,10j\delta)}$$
$$= \alpha - (-1)^{i_0}\mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\partial_{i_0}(\alpha))) = \alpha - \nu^{(j)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha)$$

Pour résumer :
$$\phi^{(j)}_{x,y}(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } 1 \leq j < l \\ \alpha - (-1)^{i_0}\nu^{(j)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha) & \text{si } l \leq j < m \\ 0 & \text{si } j \geq m \end{cases}$$

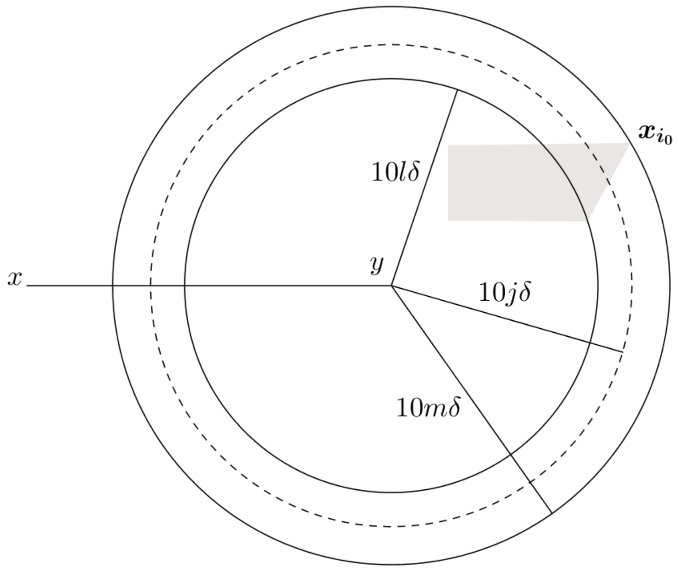

FIGURE 16 – Cas où $l \leq j < m$, $\phi_{x,y}^{(j)}(\alpha) = \alpha - \nu_{x,y}^{(j)}(\partial_{i_0}\alpha)$

b) Expression de $\nu_{x,y}$

D'après la 3ème étape, $Supp(\nu_{f_{j+1}(y,x),y}(\alpha)) \subset B(y, 5\delta{+}r')$ lorsque $Supp(\alpha) \subset B(y, r')$.
Supposons que $l \leq j < m$ alors $Supp(\partial_{i_0\alpha}) \subset B(y, 10l\delta)$ et :

$$Supp(\nu_{f_{j+1}(y,x),y}(\partial_{i_0}\alpha)) \subset B(y, 10l\delta + 5\delta) \subset B(y, 10(j+1)\delta)$$

Donc $Supp(\nu_{f_{j+1}(y,x),y}(\partial_{i_0}\alpha))$ est contenu dans $B(y, 10(j+1)\delta)$ et :

$$\phi_{x,y}^{(j+1)}(\nu_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha)) = 0$$

Cette égalité va garantir l'absence d'accumulation des "erreurs" $(-1)^{i_0}\nu_{x,y}^{(j)}(\partial_{i_0}\alpha)$ dans le calcul de la somme.

Rappelons que

$$\nu_{x,y} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}$$

Si $j > l$:

$$\begin{aligned}
\phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}(\alpha) &= (\phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(l)}) \circ (\phi_{x,y}^{(l-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(2)})(\phi_{x,y}^{(1)}(\alpha)) \\
&= \phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(l)}(\alpha) = \phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(l+1)}(\alpha - (-1)^{i_0}\nu_{x,y}^{(l)}(\partial_{i_0}\alpha)) \\
&= \phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(l+1)}(\alpha) - (-1)^{i_0}\phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(l+1)}(\nu_{f_{j+1}(y,x),y}^{(l)}(\partial_{i_0}\alpha)) \\
&= \phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(l+1)}(\alpha)
\end{aligned}$$

En itérant, on obtient :

$$\phi_{x,y}^{(j)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}(\alpha) = \phi_{x,y}^{(j)}(\alpha) \text{ si } j > l$$

Mais rappelons que $\phi_{x,y}^{(j)}(\alpha) = 0$ si $j > m$, il vient :

$$\begin{aligned}
\nu_{x,y}(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}(\alpha) &= \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)}(\alpha) \\
&= \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)}(\alpha - (-1)^{i_0} \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \\
&= \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))
\end{aligned}$$

Or $\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha) = \mu_{f_{j+1}(y,x),y} \circ \chi_{B(y,10j\delta}$ donc, par définition de m, $\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha) = 0$ si $j < m$. Finalement :

$$\nu_{x,y}(\alpha) = \nu_{x,y}^{(m)}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))$$

Cette somme étant finie, on en déduit en particulier que l'application $\nu_{x,y}$ est bien définie.

7ème étape : montrons que $\nu_{x,y}$ est bien une homotopie contractante.

$\nu_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y} = (\sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}) \circ \partial + \partial \circ (\sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)})$

Or $\phi_{x,y}^{(j)} = Id - (\nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y}^{(j)})$ et $\partial \circ \partial = 0$ donc :

1. $\partial \circ \phi_{x,y}^{(j)} = \partial - \partial \circ (\nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial$
2. $\phi_{x,y}^{(j)} \circ \partial = \partial - \partial \circ (\nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial$

Ainsi $\partial \circ \phi_{x,y}^{(j)} = \phi_{x,y}^{(j)} \circ \partial$ et :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)} \circ \partial = (\sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial) \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\nu_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y} &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)} + \partial \circ (\sum_{j=1}^{\infty} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (\nu_{x,y}^{(j)} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y}^{(j)}) \circ \phi_{x,y}^{(j-1)} \circ ... \circ \phi_{x,y}^{(1)}
\end{aligned}$$

Or, par définition de $\phi^{(j)}_{x,y}$, on a $\nu^{(j)}_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu^{(j)}_{x,y} = Id - \phi^{(j)}_{x,y}$. Donc :

$$\nu_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y} = \sum_{j=1}^{\infty} (Id - \phi^{(j)}_{x,y}) \circ \phi^{(j-1)}_{x,y} \circ ... \circ \phi^{(1)}_{x,y}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{(j-1)}_{x,y} \circ ... \circ \phi^{(1)}_{x,y} - \phi^{(j)}_{x,y} \circ \phi^{(j-1)}_{x,y} \circ ... \circ \phi^{(1)}_{x,y} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{(j-1)}_{x,y} - \phi^{(j)}_{x,y}$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \phi^{0}_{x,y} - \phi^{(N)}_{x,y}$$

Or

1. $\phi^{0}_{x,y} = Id - (\nu^{(0)}_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu^{(0)}_{x,y}) = Id$ car $\nu^{(0)}_{x,y} = 0$
2. Pour tout simplexe α, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N_0 \geq m$ si m désigne le plus petit entier tel que $Supp(\alpha) \subset B(y, 10m\delta)$ et alors $\phi^{(N_0)}_{x,y}(\alpha) = 0$ donc $= \lim\limits_{N \to +\infty} \phi^{(N)}_{x,y} = 0$

Finalement : $\nu_{x,y} \circ \partial + \partial \circ \nu_{x,y} = Id - 0 = Id$

Étape 8 : Paramètres de dispersion de $\nu_{x,y}$

a) Montrons que $\nu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+4r+12\delta}$

Nous savons, d'après la 3ème étape b) que si α est de diamètre au plus R et que si $Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\})$ alors $\nu^{(j)}_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+2r+4\delta}$.
D'après la 3ème étape a), nous savons que $Supp(\nu^{(j)}_{x,y}(\alpha)) \subset Supp(\alpha) \cup B(geod\{x,y\}, 2\delta)$.
Il vient :

$$\begin{aligned} Supp(\nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha)) &\subset Supp(\partial_{i_0}\alpha) \cup B(geod\{x,y\}, 2\delta) \\ &\subset B(geod\{x,y\}, r) \cup B(geod\{x,y\}, 2\delta) \\ &\subset B(geod\{x,y\}, r + 2\delta) \end{aligned}$$

car $Supp(\partial_{i_0}\alpha) \subset Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\}, r)$

Par ailleurs, $\nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha)) \in C_*^{R+2r+4\delta}$. D'où :

$$\nu^{(j)}_{x,y} \circ \nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha)) \in C_*^{(R+2r+4\delta)+2(r+2\delta)r+4\delta} = C_*^{R+4r+12\delta}$$

Or, d'après la 6ème étape :

$$\nu_{x,y}(\alpha) = \nu^{(m)}_{x,y}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum_{j=l+1}^{m} \nu^{(j)}_{x,y} \circ \nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha))$$

D'où

$$\nu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+4r+12\delta}$$

car $\nu_{x,y}^{(m)}(\alpha) \in C_*^{R+2r+4\delta} \subset C_*^{R+4r+12\delta}$

b) Montrons que $Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), 2R + 6r + 16\delta)$
$\nu_{x,y}(\alpha) = \nu_{x,y}^{(m)}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))$

D'après la 3ème étape, point b), nous savons que si $Supp(\alpha) \subset B(geod\,\{x,y\}\,, r)$ alors :
$Supp(\nu^{(j)}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R + 2r + 4\delta)$ pour tout $j \geq 1$

Donc :

$$Supp(\nu_{x,y}^{(j)}(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))) \subset B(Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)), R' + 2r' + 4\delta)$$

si $Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \subset B(geod\,\{x,y\}\,, r')$ et si $diam(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \leq R'$.

Nous avons montré au dessus que

$$Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \subset B(geod\,\{x,y\}\,, r + 2\delta)$$

et que $\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \in C_*^{R+2r+4\delta}$.
Ainsi $R' = R + 2r + 4\delta$ et $r' = r + 2\delta$. Il vient :

$$\begin{aligned} Supp(\nu_{x,y}^{(j)}(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))) &\subset B(B(Supp(\alpha), R + 2r + 4\delta), R' + 2r' + 4\delta) \\ \subset B(Supp(\alpha), R + 2r + 4\delta + R' + 2r' + 4\delta) &= B(Supp(\alpha), 2R + 6r + 16\delta) \end{aligned}$$

Par ailleurs $Supp(\nu^{(m)}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R + 2r + 4\delta) \subset B(Supp(\alpha), 2R + 6r + 16\delta)$
D'où :

$$Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), 2R + 6r + 16\delta)$$

c) Montrons que $Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset Supp(\alpha) \cup B(geod\,\{x,y\}\,, 2\delta)$
D'après la 3ème étape a), on a :

$$Supp(\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha)) \subset Supp(\alpha) \cup B(geod\,\{x,y\}\,, 2\delta)$$

donc :

$$\begin{aligned} Supp(\nu_{x,y}^{(j)}(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))) &\subset Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \cup B(geod\,\{x,y\}\,, 2\delta) \\ &\subset B(geod\,\{x,y\}\,, 2\delta) \end{aligned}$$

De même, $Supp(\nu_{x,y}^{(m)}(\alpha)) \subset Supp(\alpha) \cup B(geod\{x,y\}, 2\delta)$. Donc :

$$Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset Supp(\alpha) \cup B(geod\{x,y\}, 2\delta)$$

d) Montrons que $\|\nu_{x,y}(\alpha)\|_1 \leq C_7(\delta, R, r, k)$

Nous avons déjà prouvé dans la 4ème étape que :

$$\left\|\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha_k)\right\|_1 \leq C_5(\delta, R, r+\delta, k) \text{ si } \alpha_k \in \Delta_k(G)$$

$$\begin{aligned}
\|\nu_{x,y}(\alpha_k)\|_1 &= \left\|\nu_{x,y}^{(m)}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum_{j=l+1}^{m} \nu_{x,y}^{(j)} \circ \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))\right\|_1 \\
&\leq \left\|\nu_{x,y}^{(m)}(\alpha)\right\|_1 + \sum_{j=l+1}^{m} \left\|\nu_{x,y}^{(j)} \circ \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))\right\|_1
\end{aligned}$$

$$\leq C_5(\delta, R, r+\delta, k) + \sum_{j=l+1}^{m} C_5(\delta, R+2r+4\delta, r+2\delta, k) \left\|\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha_k)\right\|_1$$

car $\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \in C_*^{R+2r+4\delta}$ et $Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)) \subset B(geod\{x,y\}, r+2\delta)$ Il vient :

$$\|\nu_{x,y}(\alpha_k)\|_1$$
$$\leq C_5(\delta, R, r+\delta, k) + (m-l)C_5(\delta, R+2r+4\delta, r+2\delta, k) \times C_5(\delta, R+\delta, r+2\delta, k-1)$$

Or, par construction (Cf. 6ème étape a))de l et m :

$$m-l-1 \leq 10\delta(m-l-1) \leq diam(\alpha) \leq R \text{ car } \delta \in \mathbb{N}^*$$

D'où $m-l \leq R+1$ et :

$$\|\nu_{x,y}(\alpha_k)\|_1$$
$$\leq C_5(\delta, R, r+\delta, k) + (R+1)C_5(\delta, R+2r+4\delta, r+2\delta, k) \times C_5(\delta, R+\delta, r+2\delta, k-1) = C_7(\delta, R, r, k)$$

Étape 9 : Équivariance de la famille $(\nu_{x,y})$

$\nu_{gx,gy}^{(j)}(g\alpha) = \mu_{f_{j+1}(gy,gx),gy}\chi_{B(gy,10j\delta}(g\alpha)$
$= \mu_{gf_{j+1}(y,x),gy}\chi_{B(gy,10j\delta}(g\alpha)$ car f équivariante

Or $d(gy, g\alpha) \leq 10j\delta \Leftrightarrow d(y,\alpha) \leq 10j\delta$ donc :

$\nu_{gx,gy}^{(j)}(g\alpha) = \mu_{gf_{j+1}(y,x),y}(g\chi_{B(y,10j\delta}(\alpha))$
$= \mu_{gf_{j+1}(y,x),gy}(g\chi_{B(y,10j\delta}(\alpha))$
$= g\mu_{f_{j+1}(y,x),y}(\chi_{B(y,10j\delta}(\alpha))$ par équivariance de $(\mu_{x,y})$
$= g\nu_{x,y}^{(j)}(\alpha)$

D'où : $\nu_{gx,gy}(g\alpha) = \nu^{(m)}_{gx,gy}(g\alpha) - (-1)^{i_0} \sum\limits_{j=l+1}^{m} \nu^{(j)}_{gx,gy} \circ \nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0} g\alpha))$

$= g\nu^{(m)}_{x,y}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum\limits_{j=l+1}^{m} \nu^{(j)}_{gx,gy} \circ \nu^{(j-1)}_{gx,gy}(g\partial_{i_0}\alpha))$

$= g\nu^{(m)}_{x,y}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum\limits_{j=l+1}^{m} \nu^{(j)}_{gx,gy}(g\nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha))$

$= g\nu^{(m)}_{x,y}(\alpha) - (-1)^{i_0} \sum\limits_{j=l+1}^{m} g\nu^{(j)}_{x,y}(\nu^{(j-1)}_{x,y}(\partial_{i_0}\alpha))$

$= g\nu_{x,y}(\alpha)$

Étape 10 : continuité en x de $(\nu_{x,y})$

Il s'agit de montrer que de petites variations de x (c'est-à-dire de petites variations du point de base) ont un faible impact sur $\nu_{x,y}(\alpha)$.
Soit un nouveau point de base $x' \in G$.
Rappelons que $Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\}, r)$.

a) Montrons que $Supp(\alpha) \subset B(geod\{x',y\}, r'')$
Soit $z \in geod\{x,y\}$ et soit $z' \in geod\{x',y\}$ tel que $d(z,z') = d(z, geod\{x',y\})$.
Donnons nous trois segments $[x,x']$, $[x',y]$ et $[x,y]$. Par hyperbolicité, au moins l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :

1. $d(z,[x',y]) \leq \delta \leq \delta + d(x,x')$
2. $d(z,[x,x']) \leq \delta$: soit $u \in [x,x']$ tel que $d(z,u) \leq \delta$ alors :

$$\begin{aligned} d(z,[x',y]) &\leq d(z,u) + d(u,[x',y]) \leq \delta + d(u,x') \\ &\leq \delta + d(x,x') \text{ car } u \in [x,x'] \end{aligned}$$

Dans les deux cas $d(z,[x',y]) \leq \delta + d(x,x')$. On en déduit que :

$$geod\{x,y\} \subset B(geod\{x',y\}, \delta + d(x,x'))$$

D'où :

$$Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\}, r) \subset B(geod\{x',y\}, r + \delta + d(x,x'))$$

b) Majoration de $\left\|(\nu^{(j)}_{x,y} - \nu^{(j)}_{x',y})(\alpha)\right\|_1$

$\left\|(\nu^{(j)}_{x,y} - \nu^{(j)}_{x',y})(\alpha)\right\|_1 = \left\|(\mu_{f_{j+1}(y,x),y} - \mu_{f_{j+1}(y,x'),y}) \circ \chi_{B(y,10j\delta)}(\alpha)\right\|_1$

$\leq \left\|(\mu_{f_{j+1}(y,x),y} - \mu_{f_{j+1}(y,x'),y})(\alpha)\right\|_1 = \left\|\sum\limits_{l}^{n} c_l \mu_{z_l,y}(\alpha) - \sum\limits_{l'} c_{l'} \mu_{z_{l'},y}(\alpha)\right\|_1$

Or $\sum\limits_{l} c_l \mu_{z_l,y}(\alpha) - \sum\limits_{l'} c_l \mu_{z_{l'},y}(\alpha) = \sum\limits_{l,l'} c_{l,l'} \mu_{z_{l,l'},y}(\alpha)$ avec :

1. $c_{l,l'} = c_l$ et $z_{l,l'} = z_l$ si $c_{l'} = 0$ et $z_l \neq z_{l'}$
2. $c_{l,l'} = c_{l'}$ et $z_{l,l'} = z_{l'}$ si $c_l = 0$ et $z_l \neq z_{l'}$
3. $c_{l,l'} = c_l - c_{l'}$ et $z_{l,l'} = z_l$ si $z_l = z_{l'}$

Dans tous les cas, on a $c_{l,l'} = c_l - c_{l'}$. Il vient :

$$\left\|(\nu^{(j)}_{x,y} - \nu^{(j)}_{x',y})(\alpha)\right\|_1 \leq \left\|\sum_{l,l'}(c_l - c_{l'})\mu_{z_{l,l'},y}(\alpha)\right\|$$
$$\leq \sum_{l,l'} \mid c_l - c_{l'} \mid \sup_{z\in E_{j,x,x',y}} \|\mu_{z,y}(\alpha)\|_1 =$$
$$\|f_{j+1}(y,x) - f_{j+1}(y,x')\| \sup_{z\in E_{j,x,x',y}} \|\mu_{z,y}(\alpha)\|_1 \text{ où}$$
$$E_{j,x,x',y} = Supp(f_{j+1}(y,x)) \cup Supp(f_{j+1}(y,x))$$

Or, d'après le 5ème point de la Proposition 5.16 : il existe des constantes $C_6(\delta, \mid S \mid) \geq 0$ et $\lambda_3(\delta, \mid S \mid) \in [0;1[$ telles que :

$$\|f_{j+1}(y,x) - f_{j+1}(y,x')\| \leq C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(j+1)\delta}$$

Si $z \in Supp(f_{j+1}(y,x')$ alors d'après le point a) précédent :

$$Supp(\alpha) \subset B(geod\{x,y\}, r) \subset B(geod\{x',y\}, r'')$$

où $r'' = r + \delta + d(x,x') > r$. Donc, d'après la 2ème étape :

$$Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r'' + \delta)$$

Si $z \in Supp(f_{j+1}(y,x)$ alors $Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r + \delta)$. On sait que $r < r''$ donc dans les deux cas $Supp(\alpha) \subset B(geod\{z,y\}, r + \delta)$

Donc, d'après 5.2, il existe une constante $C_5(R,r,k)$ telle que :

$$\sup_{z\in E_{j,x,x',y}} \|\mu_{z,y}(\alpha)\|_1 \leq C_5(R, r'' + \delta, k)$$

Pour conclure :

$$\left\|(\nu^{(j)}_{x,y} - \nu^{(j)}_{x',y})(\alpha)\right\|_1 \leq C_5(R, r'' + \delta, k) C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(j+1)\delta}$$

c) Majoration de $\|(\nu_{x,y} - \nu_{x',y})(\alpha)\|_1$

$$\|(\nu_{x,y}-\nu_{x',y})(\alpha)\|_1$$
$$= \left\|(\nu_{x,y}^{(m)}-\nu_{x',y}^{(m)})(\alpha)-(-1)^{i_0}\sum_{j=l+1}^{m}(\nu_{x,y}^{(j)}\circ\nu_{x,y}^{(j-1)}-\nu_{x,y}^{(j)}\circ\nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha))\right\|_1$$
$$\leq \left\|(\nu_{x,y}^{(m)}-\nu_{x',y}^{(m)})(\alpha)\right\|_1+\sum_{j=l+1}^{m}\left\|(\nu_{x,y}^{(j)}\circ\nu_{x,y}^{(j-1)}-\nu_{x,y}^{(j)}\circ\nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha))\right\|_1$$
$$\leq C_5(R,r''+\delta,k)C_6\lambda_3^{(x|x')_y-10(j+1)\delta}+\sum_{j=l+1}^{m}\left\|(\nu_{x,y}^{(j)}-\nu_{x',y}^{(j)})\circ\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\right\|_1+$$
$$\left\|\nu_{x',y}^{(j)}\circ(\nu_{x,y}^{(j-1)}-\nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha)\right\|_1$$

D'après l'étape 8 a) :

$$Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha))\subset B(geod\,\{x,y\}\,,r+2\delta)$$

et d'après l'étape 4 :

$$\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\in C_*^{R+2r+4\delta}(G,\mathbb{Q})$$

Donc d'après b) ci-dessus :

$$\left\|(\nu_{x,y}^{(j)}-\nu_{x',y}^{(j)})\circ\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\right\|_1$$
$$\leq C_5(R+2r+4\delta,r''+3\delta,k)C_6\lambda_3^{(x|x')_y-10(j+1)\delta}$$
$$\leq C_8(\delta,R,r,d(x,x'),k)C_6(\delta,\mid S\mid)\lambda_3^{(x|x')_y-10(j+1)\delta}$$

Par ailleurs, d'après l'étape 10 a),

$$Supp(\partial_{i_0}\alpha)\subset Supp(\alpha)\subset B(geod\,\{x',y\}\,,r'')\text{ où } r''=r+\delta+d(x,x')$$

Donc, d'après l'étape 4, $\nu_{x',y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\in C_{*+1}^{R+2r''+4\delta}(G,\mathbb{Q})$ et $\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\in C_{*+1}^{R+2r+4\delta}(G,\mathbb{Q})$ avec $r\leq r'$. Par conséquent :

$$(\nu_{x,y}^{(j-1)}-\nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha)\in C_{*+1}^{R+2r''+4\delta}(G,\mathbb{Q})$$

De plus :

1. $Supp(\nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\subset Supp(\alpha)\cup B(\{x,y\}\,,2\delta)\subset Supp(\alpha)\cup B(\{x',y\}\,,r'')$
2. $Supp(\nu_{x',y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha)\subset Supp(\alpha)\cup B(\{x',y\}\,,2\delta)$
3. $Supp(\alpha)\subset B(geod\,\{x',y\}\,,r'')$

Donc $Supp((\nu_{x,y}^{(j-1)}-\nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha))\subset B(geod\,\{x',y\}\,,r''+2\delta)$.
D'après l'étape 10 b), il vient :

$$\left\| \nu_{x',y}^{(j)} \circ (\nu_{x,y}^{(j-1)} - \nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha) \right\|_1$$
$$\leq C_5(R'', (r''+2)+\delta, k) \left\| (\nu_{x,y}^{(j-1)} - \nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha) \right\|_1$$
$$\leq C_5(R'', (r''+2)+\delta, k) C_5(R, r''+\delta, k) C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(j+1)\delta}$$
$$\leq C_9(\delta, R, r, d(x,x'), k) C_6(\delta, \mid S \mid) \lambda_3^{(x|x')_y - 10(j+1)\delta}$$

Pour conclure :

$$\| (\nu_{x,y} - \nu_{x',y})(\alpha) \|_1$$
$$\leq C_5(R, r''+\delta, k) C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(j+1)\delta} + \sum_{j=l+1}^{m} \left\| (\nu_{x,y}^{(j)} - \nu_{x',y}^{(j)}) \circ \nu_{x,y}^{(j-1)}(\partial_{i_0}\alpha) \right\|_1 +$$
$$\left\| \nu_{x',y}^{(j)} \circ (\nu_{x,y}^{(j-1)} - \nu_{x',y}^{(j-1)})(\partial_{i_0}\alpha) \right\|_1$$
$$\leq C_5(R, r''+\delta, k) C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(j+1)\delta} + (m-l) \times$$
$$\left[C_8(\delta, R, r, d(x,x'), k) C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(m+1)\delta} + C_9(\delta, R, r, d(x,x'), k) C_6 \lambda_3^{(x|x')_y - 10(m+1)\delta} \right]$$
$$\leq C_{10}(\delta, R, r, d(x,x'), k) C_6(\delta, \mid S \mid) \lambda_3^{(x|x')_y - 10(m+1)\delta}$$

Or, par construction, m est le plus petit entier tel que $B(y, 10m\delta)$ contienne $Supp(\alpha)$. Donc :

$$\begin{aligned} 10m\delta \leq \max_{v \in Supp(\alpha)} (d(y,v)) + 10\delta &\leq d(y, Supp(\alpha)) + diam(Supp(\alpha)) + 10\delta \\ &\leq d(y, Supp(\alpha)) + R + 10\delta \end{aligned}$$

Par ailleurs $\lambda_3 \in [0; 1[$ donc

$$\lambda_3^{(x|x')_y - 10(m+1)\delta} \leq \lambda_3^{(x|x')_y - d(y, Supp(\alpha)) - R - 10\delta}$$

et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} (x \mid x')_y &= \tfrac{1}{2}(d(y,x) + d(y,x') - (x,x')) \\ &\geq \tfrac{1}{2}(d(y,x) + d(y,x) + d(x,x') - (x,x')) \geq d(y,x) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\lambda_3^{(x|x')_y - 10(m+1)\delta} \leq \lambda_3^{d(y,x) - d(y, Supp(\alpha)) - R - 10\delta} = \lambda_3^{-R-10\delta} \lambda_3^{d(y,x) - d(y, Supp(\alpha))}$$

Finalement :

$$\| (\nu_{x,y} - \nu_{x',y})(\alpha) \|_1$$
$$\leq C_{10}(\delta, R, r, d(x,x'), k) C_6(\delta, \mid S \mid) \lambda_3^{-R-10\delta} \lambda_3^{d(y,x) - d(y, Supp(\alpha))}$$
$$\leq C_{11}(\delta, R, r, d(x,x'), k) \lambda_3^{d(y,x) - d(y, Supp(\alpha))}$$

car λ_3 ne dépend que de δ et de $\mid S \mid$ $\square$

5.4 Contraction continue des complexes de Rips

Nous sommes maintenant en mesure de construire une homotopie "se comportant bien" entre les applications du complexes de Rips de G induites par l'identité et la projection sur un point de base. C'est-à-dire que l'homotopie de chaine dépendra continument du point de base choisi dans le graphe de Cayley de (G, S).
En degré zéro, nous utilisons le bicombing de Mineyev (Cf.5.13) possédant de bonnes propriétés de continuité. Puis nous construisons l'homotopie de chaîne par récurrence sur le degré en appliquant l'algorithme de remplissage continu établi dans le paragraphe précédent. Par la suite, les estimations des coefficients de matrice et des normes des opérateurs associés dépendront de trois paramètres :

1. la dilatation
2. la propagation
3. la norme ℓ^1 de l'homotopie de chaine contractante

C'est pourquoi, tout au long de la construction, nous serons vigilants quant au contrôle de ces trois paramètres.

Lemme 5.20. *Soit (G, S) un groupe finiment engendré, $\delta-$ hyperbolique. On se donne un bicombing $\tilde{q}$ sur son graphe de Cayley.*
Soit $R > 4\delta$ un entier pair.
On suppose R entier pair tel que $4\delta \leq R$. Pour tout $x \in G$, on définit une application $\sigma_x : G \to G$ par :
$\sigma_x(y) =$

1. *le point sur la géodésique $\tilde{q}\,[x, y]$ situé à une distance $\frac{R}{2}$ de y si*
$$d(x, y) \geq \frac{R}{2} + 2\delta$$
2. *x sinon*

On définit ensuite l'application τ_x par :

$$\tau_x([x_0, ..., x_n]) = (-1)^i\,[x_0, ..., \sigma_x(x_i), x_i, ...x_n]$$

où i est l'indice du sommet x_i tel que :

1. *$d(x, x_i) = \max_j(d(x, x_j))$*
2. *$d(x, x_j) < d(x, x_i)$ pour tous les $j < i$*

i est donc le plus petit indice pour lequel $\max_j(d(x, x_j))$ est atteint.
Alors :

1. *τ_x définit une application $C_*^R(G, \mathbb{Z}) \to C_{*+1}^R(G, \mathbb{Z})$*

2. $\tau_x^2 = 0$

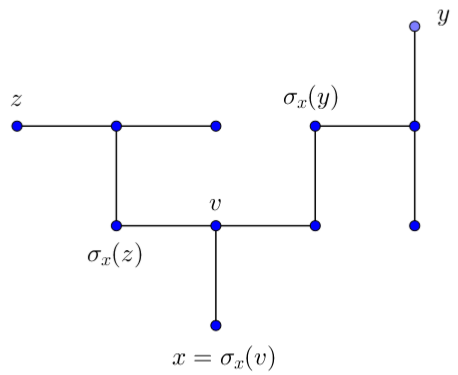

FIGURE 17 – Cas où R=4, $d(x,y) = 5 \geq \frac{R}{2} + 2\delta$, $d(x,v) = 1 \leq \frac{R}{2} + 2\delta$

Preuve :
1ère Étape : Montrons que $\tau_x : C_*^R(G,\mathbb{Z}) \to C_{*+1}^R(G,\mathbb{Z})$ est bien définie si $R \geq 4\delta$.
Il nous faut montrer que $\tau_x(\Delta_n^R(G)) \subset \Delta_n^R(G)$. Pour cela, montrons que si $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ alors $\tau_x(\alpha) \in \Delta_n^R(G)$.
Soit un simplexe $\alpha \in \Delta_n^R(G)$, considérons un sommet z de α qui soit à distance maximale de x parmi tous les autres sommets de α. Soit y un autre sommet de α, alors :

$$d(x,y) \leq d(x,z) \text{ et } d(y,z) \leq R$$

Montrons que $d(y, \sigma_x(z)) \leq R$).
Par construction, on sait que $\sigma_x(z) \in [x,z]$. En considérant le triplet (x,y,z), par hyperbolicité deux cas se présentent :

1. Il existe $u \in [y,z]$ tel que $d(u, \sigma_x(z)) \leq \delta$. Alors :
$$d(u,z) \geq d(z,\sigma_x(z)) - d(u,\sigma_x(z)) \geq \tfrac{R}{2} - \delta \geq \delta \text{ car } R \geq 4\delta$$
Il vient :
$$\begin{aligned}&d(y,\sigma_x(z)) \leq d(y,u) + d(u,\sigma_x(z))\\&\leq d(y,z) - d(z,u) + d(u,\sigma_x(z)) \text{ car } u \in [y,z]\\&\leq R - \delta + \delta = R\end{aligned}$$
2. Il existe $v \in [x,y]$ tel que $d(v,\sigma_x(z)) \leq \delta$. Alors :
$$\begin{aligned}&d(x,v) \geq d(x,\sigma_x(z)) - d(v,\sigma_x(z))\\&\geq d(x,z) - d(z,\sigma_x(z)) - d(v,\sigma_x(z)) \text{ car } \sigma_x(z) \in [x,z]\\&\geq d(x,y) - \tfrac{R}{2} - \delta\end{aligned}$$

Il vient :

$d(y,\sigma_x(z)) \leq d(y,v) + d(v,\sigma_x(z))$
$\leq d(x,y) - d(x,v) + d(v,\sigma_x(z))$ car $v \in [x,y]$
$\leq d(x,y) - d(x,y) + \frac{R}{2} + \delta + \delta$
$\leq \frac{R}{2} + 2\delta \leq R$ car $R \geq 4\delta$

2ème Étape : Montrons que $\tau_x^2 = 0$.
Étant donné que $R \geq 4\delta$ et que la construction ci-dessus (qui consiste à rapprocher un sommet x_i d'un point de base x) est la même que dans la preuve du Lemme 1.7.a de [Grom], l'image d'un simplexe de diamètre R reste de diamètre inférieur ou égal à R .
Rappelons qu'un simplexe dégénéré s'écrit sous la forme $[x_0,...,x_k,x_k,...,x_n]$.
Soit i est le plus petit indice pour lequel $\max_j(d(x,x_j))$ est atteint.

1. si $i = k$ alors $\tau_x([x_0,...,x_n]) = (-1)^i [x_0,...,\sigma_x(x_k),x_k,x_k,...x_n]$ qui est dégénéré
2. si $i < k$ alors $\tau_x([x_0,...,x_n]) = (-1)^i [x_0,...,\sigma_x(x_i),...,x_k,x_k,...x_n]$ qui est également dégénéré. De même si $i > k$ □

Par définition $\tau_x([x_0,...,x_n]) = (-1)^i [x_0,...,\sigma_x(x_i),x_i,...x_n]$ donc :

$$\tau_x^2([x_0,...,x_n]) = (-1)^i \tau_x([x_0,...,\sigma_x(x_i),x_i,...x_n]) = \\ (-1)^i(-1)^{i+1}\tau_x([x_0,...,\sigma_x(x_i),\sigma_x(x_i),x_i,...x_n])$$

qui est dégénéré □

Lemme 5.21. *Définissons l'application $\varphi_x = Id - (\partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial)$, **contraction auxiliaire du complexe de Rips**.*
Posons maintenant :

1. $\xi_x = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_x \circ \varphi_x^k$
2. $\varphi_x^\infty = Id - (\xi_x\partial + \partial\xi_x)$

Alors :

1. ξ_x *est bien définie*
2. $\lim_{k\to+\infty} \varphi_x^k$ *est définie avec* $\varphi_x^\infty = \lim_{k\to+\infty} \varphi_x^k$
3. $\begin{cases} \varphi_x^\infty([y]) = [x], \forall [y] \in \Delta_0^R(G) \\ \varphi_x^\infty = 0 \text{ en degré strictement supérieur à zéro} \end{cases}$
4. ξ_x *est une homotopie contractante du complexe de Bar augmenté*
5. $\xi_x \circ \xi_x = 0$ *sur* $C_*^R(G,\mathbb{Z})$

6. *sur $C_*^R(G,\mathbb{Z})$, pour un simplexe réduit $[x_0,...,x_n]$, il existe une constante C_{12} ne dépendant que de R,n et de la distance de x à $Supp(\alpha)$ telle que : $\|\xi_x(\alpha)\| \leq C_{12}(R, d(x, Supp(\alpha)), n)$*
7. *pour tout simplexe α, le support de $\xi_x(\alpha)$ est contenu dans le plus petit sous ensemble de G contenant $Supp(\alpha)$ et stable par σ_x.*

Preuve : On pourra se référer au Lemme 2.3 de [Pu2]. Explicitons cependant les calculs.
1ère étape : calcul explicite
D'une part :

$$\partial\circ\tau_x([x_0,...,x_n]) = \partial((-1)^i\,[x_0,...,x_{i-1},\sigma_x(x_i),x_i,...,x_n])$$
$$= (-1)^i(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\,[x_0,...,x_{j-1},x_{j+1},...,\sigma_x(x_i),x_i,...,x_n]$$
$$+(-1)^i\,[x_0,...,x_n] + (-1)^{i+1}\,[x_0,...,\sigma_x(x_i),x_{i+1},...,x_n] +$$
$$\sum_{j=i+2}^{n+1}(-1)^j\,[x_0,...,\sigma_x(x_i),x_i,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n])$$

Et d'autre part :

$$\tau_x\circ\partial([x_0,...,x_n]) = \tau_x(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\,[x_0,...,x_{j-1},x_{j+1},...,,x_i,...,x_n]$$
$$+(-1)^i\,[x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j\,[x_0,...,,x_i,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n])$$
$$= (-1)^{i-1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\,[x_0,...,x_{j-1},x_{j+1},...,\sigma_x(x_i),x_i,...,x_n]$$
$$+(-1)^i(-1)^{i'-1}\,[x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,\sigma_x(x_{i'}),x_{i'},...,x_n]$$
$$+(-1)^i\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j\,[x_0,...,\sigma_x(x_i),x_i,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n])$$

Il vient :

$$\varphi_x([x_0,...,x_n]) = (Id-(\partial\circ\tau_x+\tau_x\circ\partial))([x_0,...,x_n])$$
$$= [x_0,...,\sigma_x(x_i),...,x_n] - (-1)^{i+i'-1}\,[x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,\sigma_x(x_{i'}),x_{i'},...,x_n]$$

Avec $[x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,\sigma_x(x_{i'}),x_{i'},...,x_n] \in Im(\tau_x)$.
On déduit le résultat sur $Supp(\xi(\alpha))$

2ème étape : Si $\alpha \in Im(\tau_x)$ alors $\varphi_x(\alpha)$ est la somme d'un simplexe dégénéré et d'un élément de $Im(\tau_x)$.
Supposons $\alpha \in Im(\tau_x)$ alors $\alpha = [x_0,...,\sigma_x(x_i),x_i,...,x_n]$ et d'après ce qui précède :

$$\varphi_x(\alpha) = [x_0, ..., \sigma_x(x_i), x_{i+1}, ..., x_n] - (-1)^{i+i'-1}\tau_x(\alpha')$$

3ème étape : Si α est dégénéré en $k \neq i$ alors $\varphi_x(\alpha)$ est la somme de deux simplexes dégénérés
Supposons α dégénéré alors il existe $k \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $\alpha = [x_0, ..., x_k, x_k, ..., x_n]$ et d'après ce qui précède :

$$\varphi_x(\alpha) = [x_0, ..., , x_k, x_k, ...\sigma_x(x_i), x_i, x_{i+1}, ..., x_n] - \\ (-1)^{i+i'-1} [x_0, ..., , x_k, x_k, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., \sigma_x(x_{i'}), x_{i'}, ..., x_n]$$

est somme de deux dégénérés si $k \neq i$.

4ème étape : Si α est dégénéré en $k = i$ alors $i' = i+1$ et $(-1)^{i+i'-1} = 1$:

$$\varphi_x(\alpha) = [x_0, ..., \sigma_x(x_i), x_i, x_{i+2}, ..., x_n] - [x_0, ..., x_{i-1}, \sigma_x(x_i), x_i, x_{i+2}..., x_n] = 0$$

5ème étape : On peut ainsi démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que pour tout simplexe α :

$$\varphi_x^k(\alpha) = \sum_{i=i}^{k} \tau_x(\alpha_{k,i}) + d_{k,i} + \alpha_k$$

où $d_{k,i}$ est un simplexe dégénéré et α_k s'écrit $\left[\sigma^{l_0}(x_0), ..., \sigma^{l_n}(x_n)\right]$ avec $l_i \in \mathbb{N}$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i = k$.
Il vient alors :

$$\tau_x \circ \varphi_x^k(\alpha) = \sum_{i=i}^{k} \tau_x(\tau_x(\alpha_{k,i})) + \tau_x(d_{k,i}) + \tau_x(\alpha_k)$$

Or, on montre facilement que, par construction, $\tau_x(\tau_x(\alpha_{k,i}))$ est dégénéré, de même pour $\tau_x(d_{k,i})$.
$\tau_x \circ \varphi_x^k(\alpha)$ s'écrit donc $S + \tau_x(\alpha_k)$ où S est une somme de simplexes dégénérés.
Sur $C_*^R(G, \mathbb{Z})$ on a donc

$$\tau_x \circ \varphi_x^k(\alpha) = \tau_x(\alpha_k)$$

6ème étape : Montrons que ξ_x est bien définie, c'est-à-dire que la somme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \tau_x \circ \varphi_x^k$ est finie. Soit un simplexe $\alpha = [x_0, ..., x_n]$ de diamètre au plus R, on observe que pour tout $i \in \{0, ..., n\}$:

$$d(x, x_i) \leq d(x, Supp(\alpha)) + R$$

Introduisons :

$$| [x_0, ..., x_n] |'_x = \sum_{j=0}^{n} d(x, x_j)$$

Alors $| [x_0, ..., x_n] |'_x \leq (n+1)(d(x, Supp(\alpha)) + R)$.

$$\begin{aligned} 0 \leq | \alpha_k |'_x = | \left[\sigma^{l_0}(x_0), ..., \sigma^{l_n}(x_n)\right] |'_x &= \sum_{i=0}^{n} d(x, \sigma^{l_i}(x_i)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} (d(x, x_i) - l_i \times \tfrac{R}{2}) = | \alpha |'_x - k \times \tfrac{R}{2} \\ &\leq (n+1)(d(x, Supp(\alpha)) + R) - k \times \tfrac{R}{2} \end{aligned}$$

Finalement $0 \leq (n+1)(d(x, Supp(\alpha)) + R) - k \times \frac{R}{2}$ d'où :

$$k \leq \tfrac{2(n+1)}{R}(d(x, Supp(\alpha)) + R) = C_{12}(R, d(x, Supp(\alpha)), n)$$

Le nombre de termes dans la somme est donc fini et $\xi_x(\alpha)$ est bien défini. Sur $\overline{C}_*^R(G, \mathbb{Z})$ on a donc :

$$\tau_x \circ \varphi_x^k(\alpha) = \tau_x(\alpha_k)$$

Il vient sur $C_*^R(G, \mathbb{Z})$:

$$\|\xi_x(\alpha)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \tau_x(\alpha_k) \right\| \leq C_{12}(R, d(x, Supp(\alpha)), n)$$

7ème étape : Montrons que ξ_x est une homotopie contractante. Raisonnons pour cela en plusieurs étapes :

1. On observe que $\partial \circ (\partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial) = \partial \circ \tau_x \circ \partial = (\partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial) \circ \partial$ car $\partial \circ \partial = 0$
2. On en déduit que $\partial \circ (Id - \partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial)) = (Id - \partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial)) \circ \partial$
3. Par récurrence, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

   $$\partial \circ (Id - \partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial))^k = (Id - \partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial))^k \circ \partial$$

   C'est à dire $\partial \circ \varphi_x^k = \varphi_x^k \circ \partial$
4. Il vient :

$$\partial \circ \xi_x + \xi_x \circ \partial = \sum_{k\geq 0}^{n} \partial(\tau_x \varphi_x^k) + (\tau_x \varphi_x^k) \circ \partial$$

$$= \sum_{k\geq 0}^{n} (\partial \circ \tau_x) \circ \varphi_x^k + \tau_x \circ (\varphi_x^k \circ \partial) = \sum_{k\geq 0}^{n} (\partial \circ \tau_x) \circ \varphi_x^k + (\tau_x \circ \partial) \circ \varphi_x^k$$

$$= \sum_{k\geq 0}^{n} (\partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial)\varphi_x^k = \sum_{k\geq 0}^{n} \left[Id - (Id - (\partial \circ \tau_x + \tau_x \circ \partial))\right] \varphi_x^k$$

$$= \sum_{k\geq 0}^{n} \left[Id - \varphi_x\right] \varphi_x^k = \sum_{k\geq 0}^{n} \varphi_x^k - \varphi_x^{k+1} = \varphi_x^0 = Id$$

8ème étape : Nous avons prouvé dans le Lemme 5.20 que pour tout simplexe α, $\tau_x^2(\alpha)$ est dégénéré. Donc $\tau_x^2 = 0$ sur $C_*^R(G, \mathbb{Z})$.
$Im(\tau_x)$ est stable par φ_x sur $C_*^R(G, \mathbb{Z})$ car :

$$\varphi_x \circ \tau_x = (Id - \tau_x \circ \partial - \partial \circ \tau_x) \circ \tau_x = \tau_x - \tau_x \circ \partial \circ \tau_x) = \tau_x(Id - \partial \circ \tau_x)$$

Soit un simplexe α alors par construction $\xi_x(\alpha) \in Im(\tau_x)$ et :

$$\xi^2(\alpha) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \tau_x(\varphi_x^k(\xi_x(\alpha)) = 0 \text{ car } \varphi_x^k(\xi_x(\alpha)) \in Im(\tau_x) \ \Box$$

L'image d'un sous-complexe de Rips par l'homotopie $\nu_{x,y}$ construite dans le paragraphe précédent (Cf. 5.18)est un sous complexe de Rips de diamètres supérieur. Afin d'obtenir une contraction d'un complexe de Rips donné, il nous faut contracter un complexe de Rips dans un autre de diamètre inférieur. C'est l'objet du lemme suivant qui utilise l'homotopie auxiliaire précédemment construite (Cf. 5.21).

Lemme 5.22. *Soit un groupe G $\delta-$ hyperbolique et deux réels R, R' tels que $4\delta \leq R \leq R'$. Alors il existe un morphisme de complexes $G-$ équivariant*

$$\eta_* : C_*^{R'}(G, \mathbb{Z}) \to C_*^R(G, \mathbb{Z})$$

qui est l'identité sur $C_*^R(G, \mathbb{Z}) \subset C_*^{R'}(G, \mathbb{Z})$, et qui vérifie pour tout simplexe $\alpha \in \Delta_n^{R'}(G)$:

1. *$Supp(\eta_n(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R')$*
2. *Il existe une constante $C_{13}(R, R', n)$ dépendant de n telle que :*

$$\|\eta_n(\alpha)\| \leq C_{13}(R, R', n)$$

Preuve : Soit l'application ξ_x définie dans 5.21.
Nous allons maintenant construire par récurrence l'application de chaîne (morphisme de complexes différentiels) $\eta_* : C_*^{R'}(G, \mathbb{Z}) \to C_*^R(G, \mathbb{Z})$.
Initialisons la construction en posant $\eta_0 = Id$.
Pour $n \geq 1$, supposons η_{n-1} construit et possédant les propriétés recherchées.
Posons pour tout simplexe $\alpha = [x_0, ..., x_n] \in \Delta_n(G)$:

$$\eta_n(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } diam(Supp(\alpha)) \leq R \\ \xi_{x_0} \circ \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $diam(Supp(\alpha)) > R$ alors $Supp(\eta_n(\alpha))$ est contenu dans le plus petit sous-ensemble de G contenant $Supp(\eta_{n-1} \circ \partial(\alpha))$ et stable par σ_{x_0}. Or, par hypothèse de récurrence :

$$Supp(\eta_{n-1}(\partial(\alpha))) \subset B(Supp(\partial(\alpha)), R') \subset B(Supp(\alpha), R')$$

Donc $Supp(\eta_n(\alpha))$ est contenu dans le plus petit sous-ensemble de G contenant $B(Supp(\alpha), R')$ et stable par σ_{x_0}. Or, $x_0 \in B(Supp(\alpha), R')$ donc d'après le lemme 5.20, pour tout $y \in B(Supp(\alpha), R')$, on a $\sigma_{x_0}(y) \in B(Supp(\alpha), R')$. $B(Supp(\alpha), R')$ est donc stable par σ_{x_0} et :

$$Supp(\eta_n(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R')$$

Par ailleurs : $\|\eta_n(\alpha)\| = \|\xi_{x_0} \circ \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha)\|$
Or $Supp(\eta_n(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), R')$ donc

$$d(x_0, Supp(\eta_n(\alpha))) \leq R' \text{ et } \partial(\alpha) \in C^R_{n-1}(G, \mathbb{Z})$$

$\|\eta_n(\alpha)\|$
$\leq C_{12}(R, R', n-1) \, \|\eta_{n-1} \circ \partial(\alpha)\|$
$\leq C_{12}(R, R', n-1) C_{13}(R, R', n-1)(n+1) = C_{13}(R, R', n)$

Par ailleurs, η_* est bien un morphisme de complexes différentiels. En effet, soit un simplexe $\alpha = [x_0, ..., x_n]$:

1. si $diam(Supp(\alpha)) \leq R$ alors $\eta_n(\alpha) = \alpha$ et on a bien $(\partial \circ \eta_n)(\alpha) = (\eta_{n-1} \circ \partial)(\alpha)$
2. sinon :

   $(\partial \circ \eta_n)(\alpha) = (\partial \circ \xi_{x_0}) \circ \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha) = (Id - \xi_{x_0} \circ \partial) \circ \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha)$
   $= \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha) - \xi_{x_0} \circ \partial \circ \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha)$
   $= \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha) - \xi_{x_0} \circ \eta_{n-1} \circ \partial \circ \partial(\alpha)$ par hypothèse de récurrence
   $= \eta_{n-1} \circ \partial(\alpha)$

Reste à montrer que η_n est $G-$ équivariante. Si $n = 0$ alors $\eta_n = Id$ d'où l'équivariance.
Soit $n \geq 1$, supposons η_{n-1} est $G-$ équivariante. Alors : $\eta_n(g\alpha) = g\alpha$ si $diam(Supp(g\alpha)) = diam(Supp(\alpha)) \leq R$
Sinon, supposons $\alpha = [x_0, ..., x_n]$, on a :

$\eta_n(g\alpha) = \xi_{gx_0} \circ \eta_{n-1} \circ \partial(g\alpha)$
$= \xi_{gx_0} \circ \eta_{n-1}(g\partial\alpha)$
$= \xi_{gx_0}(g\eta_{n-1}(\partial\alpha))$ car η_{n-1} est $G-$ équivariante

Soit un simplexe $\beta = [\beta_0, ..., \beta_n]$, alors d'après la définition de τ_{gx_0} dans le Lemme 5.20 :

$$\tau_{gx_0}([g\beta_0, ..., g\beta_n]) = (-1)^i \, [g\beta_0, ..., \sigma_{gx_0}(g\beta_i), g\beta_i, ..., g\beta_n]$$

où i désigne le plus petit indice pour lequel $\max_j(d(gx_0, g\beta_j)) = \max_j(d(x_0, \beta_j))$ est atteint.
Or, d'après la définition de τ_{gx_0} dans le Lemme **??** :

$$\sigma_{gx_0}(g\beta_i) = g\sigma_{x_0}(\beta_i) \text{ car } d(gx_0, g\beta_i) = d(x_0, \beta_i)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\tau_{gx_0}([g\beta_0, ..., g\beta_n]) \\
&= (-1)^i \, [g\beta_0, ..., g\sigma_{x_0}(\beta_i), g\beta_i, ..., g\beta_n] \\
&= (-1)^i g \, [\beta_0, ..., \sigma_{x_0}(\beta_i), \beta_i, ..., \beta_n] \\
&= g\tau_{x_0}([\beta_0, ..., \beta_n])
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
&\varphi_{gx_0}(g\eta_{n-1}(\partial\alpha)) \\
&= g\eta_{n-1}(\partial\alpha) - (\partial \circ \tau_{gx_0}(g\eta_{n-1}(\partial\alpha)) + \tau_{gx_0} \circ \partial(g\eta_{n-1}(\partial\alpha)) \\
&= g\eta_{n-1}(\partial\alpha) - (\partial(g\tau_{x_0}(\eta_{n-1}(\partial\alpha))) + \tau_{gx_0}(g\partial(\eta_{n-1}(\partial\alpha))) \\
&= g\eta_{n-1}(\partial\alpha) - (g\partial(\tau_{x_0}(\eta_{n-1}(\partial\alpha))) + g\tau_{x_0}(\partial(\eta_{n-1}(\partial\alpha))) \\
&= g\varphi_{x_0}(\eta_{n-1}(\partial\alpha))
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
&\eta_n(g\alpha) = \xi_{gx_0}(g\eta_{n-1}(\partial\alpha)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{gx_0} \circ \varphi_{gx_0}^k(g\eta_{n-1}(\partial\alpha)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{gx_0}(g\varphi_{x_0}^k(\eta_{n-1}(\partial\alpha))) \\
&= g \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{x_0}(\varphi_{x_0}^k(\eta_{n-1}(\partial\alpha))) \\
&= g\xi_{x_0}(\eta_{n-1}(\partial\alpha)) = g\eta_n(\alpha) \; \square
\end{aligned}$$

Lemme 5.23. *Pour tout ensemble X, on définit l'**opérateur d'antisymétrisation** par :*

$$\pi_{as} : C_*(X, \mathbb{C}) \to C_*(X, \mathbb{C})$$

$$[x_0, ..., x_n] \mapsto \tfrac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right]$$

où S_n désigne le groupe symétrique de $\{0, 1, ..., n\}$.
Alors :

1. *Il s'agit d'un morphisme de complexes de chaîne qui préserve les sous-complexes de Rips et qui est égale à l'identité en degré zéro*
2. *π_{as} est canoniquement homotope à l'identité d'après le Lemme 4.18*
3. *L'image par π_{as} d'un simplexe ayant deux sommets identiques est nulle*
4. *$\|\pi_{as}\| = 1$*
5. *π_{as} est un projecteur : $\pi_{as} \circ \pi_{as} = \pi_{as}$*

Preuve : si $[x_0, ..., x_n] \in \Delta_n^R(G)$ alors pour tout $\sigma \in S_n$, $\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right] \in \Delta_n^R(G)$. D'où la préservation des sous complexes de Rips.
π_{as} est une application $n+1$-linéaire alternée, l'image d'un simplexe ayant deux sommets identiques est nulle.

Pour tout $\sigma \in S_n$: $\left\| \left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right] \right\|_1 = 1$ donc :

$$\left\| \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right] \right\|_1 \leq \frac{1}{(n+1)!} \mid S_n \mid = 1$$

Par ailleurs :

$$\pi_{as} \circ \pi_{as}(\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right]) = \pi_{as}(\frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right])$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \pi_{as}(\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right])$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\mu)} \left[x_{\mu \circ \sigma(0)}, ..., x_{\mu \circ \sigma}(n)\right]$$

$$= \frac{1}{((n+1)!)^2} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\mu)} \left[x_{\mu \circ \sigma(0)}, ..., x_{\mu \circ \sigma}(n)\right]$$

$$= \frac{1}{((n+1)!)^2} \sum_{\nu \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\nu)} \left[x_{\nu(0)}, ..., x_{\nu}(n)\right] \text{ car } \varepsilon(\mu \circ \sigma) = \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\mu)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\nu \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\nu)} \left[x_{\nu(0)}, ..., x_{\nu}(n)\right]$$

$$= \pi_{as}(\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right])$$

Montrons qu'il s'agit d'un morphisme de complexes de chaîne :

$$\partial \circ \pi_{as}(\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right])$$
$$= \partial(\frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right])$$

$= \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \partial(\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right])$

$= \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i (\left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(i+1)}, ...x_{\sigma(n)}\right])$

$= \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i (n+1) \sum\limits_{\sigma'\in S_n^i} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (\left[x_{\sigma'(0)}, ..., x_{\sigma'(i-1)}, x_{\sigma'(i+1)}, ...x_{\sigma'(n)}\right])$ où

S_n^i désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble
$\{0, ..., i-1, i+1, ..., n\}$ avec $card(S_n) = (n+1) card(S_n^i)$
$= \frac{1}{(n)!} \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \sum\limits_{\sigma'\in S_n^i} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (\left[x_{\sigma'(0)}, ..., x_{\sigma'(i-1)}, x_{\sigma'(i+1)}, ...x_{\sigma'(n)}\right])$

$= \pi_{as}(\partial \left[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}\right]) \square$

Définition 5.24. *Soit un opérateur linéaire $\phi : C_m^R(G,\mathbb{C}) \to C_n^R(G,\mathbb{C})$. On définit les* ***coefficients de matrice*** *de ϕ, pour $\alpha \in \Delta_m^R(G)$ et $\beta \in \Delta_n^R(G)$, comme les uniques scalaires notés $< \phi(\alpha), \beta >$, tels que :*

$$\phi(\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_n^R(G)} < \phi(\alpha), \beta > \beta \text{ pour tout } \alpha \in \Delta_m^R(G)$$

Lemme 5.25. *Soit un simplexe $\alpha = [x_0, ..., x_{n-1}] \in C_{n-1}^R(G,\mathbb{Q})$ avec $n \geq 1$ alors :*

$$geod(Supp(s_x \circ i_{n-1}(\alpha))) \subset B(geod\{x, x_0\}, R+\delta)$$

où i_{n-1} désigne l'inclusion canonique.

Preuve : $Supp(s_x \circ i_{n-1}(\alpha)) = Supp([x, x_0, ..., x_{n-1}]$
Soit $z \in geod(Supp([x, x_0, ..., x_{n-1}])$ alors il existe $y_1, y_2 \in \{x, x_0, ..., x_{n-1}\}$ tels que $d(y_1, z) + d(z, y_2) = d(y_1, y_2)$.

1er cas : si $y_1 \neq x$ et $y_2 \neq x$ alors il existe $i, j \in \{0, ..., n-1\}$ tels que $y_1 = x_i$ et $y_2 = x_j$ et z appartient à une géodésique notée $[x_i, x_j]$. Dans le triangle formé par $[x_i, x_j]$ et deux géodésiques $[x_0, x_j]$ et $[x_0, x_i]$, par hyperbolicité, il existe par exemple $u \in [x_0, x_i]$ tel que $d(z, u) \leq \delta$. Il vient :

$$d(z, x_0) \leq d(z, u) + d(u, x_0) \leq \delta + d(x_i, x_0) \leq \delta + R$$

D'où $d(z, geod\{x, x_0\}) \leq d(z, x_0) \leq \delta + R$ et $z \in B(geod\{x, x_0\}, R+\delta)$
2ème cas : si par exemple $y_1 = x$ alors z appartient à une géodésique $[x, x_j]$ et $d(z, x) \leq d(x, x_j)$. Dans le triangle formé par $[x, x_j]$ et deux géodésiques $[x_0, x]$ et $[x_0, x_j]$, il a deux possibilités :

1. soit z est à une distance inférieure à δ de $[x_0, x]$ et alors $z \in B(geod\{x, x_0\}, \delta)$
2. soit z est à une distance inférieure à δ de $[x_0, x_j]$ et par inégalité triangulaire $z \in B(geod\{x, x_0\}, R + \delta)\square$

Lemme 5.26. *Soit un simplexe $\alpha = [x_0, ..., x_{n-1}] \in \Delta^R_{n-1}(G)$ avec $n \geq 1$ et $C > 0$ alors :*

$$B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C) \subset B(geod(\{x, x_0\}), C + R + \delta)$$

et si $x' \in G$ alors on a aussi :

$$B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C) \subset B(geod(\{x', x_0\}), C + R + d(x, x') + 2\delta)$$

Preuve :

Soit $z \in B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C)$.
1ère Étape : Montrons que $B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C) \subset B(geod(\{x, x_0\}), C + R + \delta)$.

1er cas : il existe $x_i \in Supp(\alpha)$ ainsi qu'une géodésique $[x, x_i]$ de x à x_i tels que $d(z, [x, x_i]) \leq C$. Soit $h \in [x, x_i]$ tel que $d(z, [x, x_i]) = d(z, h) \leq C$. Par hyperbolicité dans le triangle formé par les points x,x_0 et x_i :

1. soit h se trouve à une distance inférieure à δ de $[x, x_0]$ et il existe $\tilde{h} \in [x, x_0]$ tel que $d(h, [x, x_0]) = d(h, \tilde{h}) \leq \delta$. Alors :
$$d(z, geod(\{x, x_0\})) \leq d(z, [x, x_0]) \leq d(z, \tilde{h}) \leq C + \delta$$
2. soit h se trouve à une distance inférieure à δ de $[x_0, x_i]$ et il existe $h_i \in [x_0, x_i]$ tel que $d(h, [x_0, x_i]) = d(h, h_i) \leq \delta$. Alors :
$$d(z, geod(\{x, x_0\})) \leq d(z, [x, x_0]) \leq d(z, x_0)$$
$$\leq d(z, h) + d(h, h_i) + d(h_i, x_0) \leq C + \delta + R$$

2ème cas : il existe $x_i, x_j \in Supp(\alpha)$ ainsi qu'une géodésique $[x_i, x_j]$ de x_i à x_j tels que $d(z, [x_i, x_j]) \leq C$.
Soit $h_{i,j} \in [x_i, x_j]$ tel que $d(z, [x_i, x_j]) = d(z, h_{i,j}) \leq C$.
Par hyperbolicité dans le triangle formé par les points x_0,x_i et x_j, $h_{i,j}$ est par exemple à distance inférieure à δ de $[x_0, x_i]$. Il existe donc $w_i \in [x_0, x_i]$ tel que $d(h_{i,j}, [x_0, x_i]) = d(h_{i,j}, w_i)$ et :

$$d(z, geod(\{x, x_0\})) \leq d(z, [x, x_0]) \leq d(z, x_0)$$
$$\leq d(z, h_{i,j}) + d(h_{i,j}, x_i) + d(x_i, x_0) \leq C + \delta + R$$

2ème Étape : Montrons maintenant que $B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C) \subset B(geod(\{x', x_0\}), C + R + \delta)$.

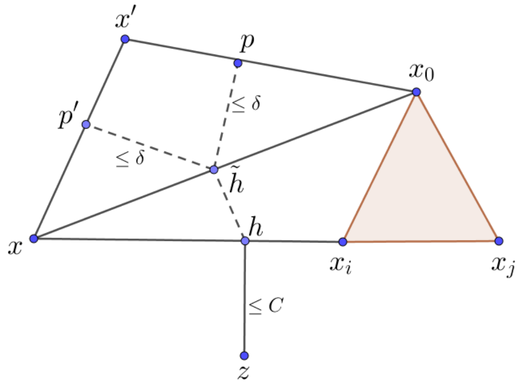

FIGURE 18 – Illustration de la 2ème étape 1er cas

1er cas : il existe $x_i \in Supp(\alpha)$ ainsi qu'une géodésique $[x, x_i]$ de x à x_i tels que $d(z, [x, x_i]) \leq C$. Soit $h \in [x, x_i]$ tel que $d(z, [x, x_i]) = d(z, h) \leq C$.
Par hyperbolicité dans le triangle formé par les points x,x_0 et x_i :

1. soit h se trouve à une distance inférieure à δ de $[x_0, x_i]$ et il existe $h_i \in [x_0, x_i]$ tel que $d(h, [x_0, x_i]) = d(h, h_i) \leq \delta$. Alors :

$$d(z, geod(\{x', x_0\})) \leq d(z, [x', x_0])$$
$$\leq d(z, h) + d(h, h_i) + d(h_i, x_0) \leq d(z, x_0) \leq C + \delta + R$$

2. soit h se trouve à une distance inférieure à δ de $[x_0, x]$ et il existe $\tilde{h} \in [x_0, x]$ tel que $d(h, [x_0, x]) = d(h, \tilde{h}) \leq \delta$. Par hyperbolicité dans le triangle formé par les points x,x_0 et x' :
   (a) soit $\tilde{h}$ se trouve à une distance inférieure à δ de $[x, x']$ et il existe $p' \in [x, x']$ tel que $d(\tilde{h}, [x, x']) = d(p', \tilde{h}) \leq \delta$. Alors :
   $$d(z, geod(\{x', x_0\})) \leq d(z, [x', x_0]) \leq d(z, x')$$
   $$\leq d(z, h) + d(h, \tilde{h}) + d(\tilde{h}, p') + d(p', x') \leq C + \delta + \delta + d(x, x')$$
   (b) soit $\tilde{h}$ se trouve à une distance inférieure à δ de $[x_0, x']$ et il existe $p \in [x_0, x']$ tel que $d(\tilde{h}, [x_0, x']) = d(\tilde{h}, p) \leq \delta$. Alors :
   $$d(z, geod(\{x', x_0\})) \leq d(z, [x', x_0]) \leq d(z, p)$$
   $$\leq d(z, h) + d(h, \tilde{h}) + d(\tilde{h}, p) \leq C + \delta + \delta$$

2ème cas : il existe $x_i, x_j \in Supp(\alpha)$ ainsi qu'une géodésique $[x_i, x_j]$ de x_i à x_j tels que $d(z, [x_i, x_j]) \leq C$.
Soit $h_{i,j} \in [x_i, x_j]$ tel que $d(z, [x_i, x_j]) = d(z, h_{i,j}) \leq C$.
Par hyperbolicité dans le triangle formé par les points x_0,x_i et x_j, $h_{i,j}$ est par exemple à distance inférieure à δ de $[x_0, x_i]$. Il existe donc $w_i \in [x_0, x_i]$ tel que $d(h_{i,j}, [x_0, x_i]) = d(h_{i,j}, w_i)$ et :

$d(z, geod(\{x', x_0\})) \leq d(z, [x', x_0]) \leq d(z, x_0)$
$\leq d(z, h_{i,j}) + d(h_{i,j}, x_i) + d(x_i, x_0) \leq C + \delta + R \square$

Lemme 5.27. *Soient deux simplexes* $\beta \in \Delta_n^R(G)$ *et* $\gamma \in \Delta_n^{C_1}(G)$*. Si* $Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), C_2)$ *alors* $Supp(\gamma) \subset B(Supp(\beta), C_1 + C_2)$ *.*

Preuve : Soit $\gamma_i \in Supp(\gamma)$. Alors il existe $\beta_i \in Supp(\beta)$ tel que $d(\gamma_i, Supp(\beta)) = d(\gamma_i, \beta_i)$.
$\beta_i \in B(Supp(\gamma), C_2)$ donc il existe $\gamma_j \in Supp(\gamma)$ tel que $d(\beta_i, \gamma_j) \leq C_2$.
Il vient :

$$d(\gamma_i, Supp(\beta)) = d(\gamma_i, \beta_i) \leq d(\gamma_i, \gamma_j) + d(d(\gamma_j, \beta_i) \leq C_1 + C_2$$

Donc $\gamma_i \in B(Supp(\beta), C_1 + C_2) \square$

Lemme 5.28. *Soit un groupe* $\delta-$ *hyperbolique* G*, deux simplexes* $\alpha = [x_0, ..., x_n] \in \Delta_n^R(G)$ *et* $\gamma \in \Delta_n(G)$ *ainsi que* $x \in G$ *. Si :*

$$Supp(\gamma) \subset B(geod((Supp(\alpha) \cup \{x\}), C)$$

alors :

$$d(x, x_0) - d(Supp(\gamma), x_0) \geq d(x, Supp(\gamma)) - 2(C + R + \delta)$$

Preuve : Soient γ_i et γ_j situés sur une géodésique $[x, x_0]$ tels que $d(Supp(\gamma), x_0) = d(\gamma_i, x_0)$ et $d(Supp(\gamma), x) = d(\gamma_j, x_0)$.
Soient w_i et w_j situés sur une géodésique $[x, x_0]$ tels que $d(\gamma_i, [x, x_0]) = d(\gamma_i, w_i)$ et $d(\gamma_j, [x, x_0]) = d(\gamma_j, w_j)$.
$Supp(\gamma) \subset B(geod((Supp(\alpha) \cup \{x\}), C)$ donc il existe h_i sur une géodésique $[x, x_i]$ tel que $d(\gamma_i, [x, x_i]) = d(\gamma_i, h_i) \leq C$. Considérons le triangle géodésique formé par les points x, x_0 et x_i :

1. soit h_i est à une distance inférieure à δ de $[x_0, x_i]$ et
$$d(\gamma_i, x_0) \leq d(\gamma_i, h_i) + \delta + R \leq C_{15} + \delta + R + d(x_0, w_i)$$
2. soit h_i est à une distance inférieure à δ de $[x_0, x]$ et :
$$d(\gamma_i, x_0) \leq d(\gamma_i, h_i) + d(h_i, w_i) + d(w_i, x_0) \leq C_{15} + \delta + d(x_0, w_i)$$

Dans les deux cas : $d(\gamma_i, x_0) \leq d(\gamma_i, h_i) + \delta + R \leq (C_{15} + \delta + R) + d(x_0, w_i)$
De la même manière, on obtient $d(\gamma_j, x) \leq (C_{15} + \delta + R) + d(x, w_j)$
D'où $d(x, w_j) \geq d(\gamma_j, x) - (C_{15} + \delta + R)$
Il vient :

$d(x, x_0) - d(x_0, \gamma_i) \geq d(x, x_0) - d(x_0, w_i) - (C_{15} + \delta + R)$
$\geq d(x, w_i) - (C_{15} + \delta + R)$
$\geq d(x, w_j) - (C_{15} + \delta + R)$
$\geq d(\gamma_j, x) - 2(C_{15} + \delta + R) \square$

Théorème 5.29. ***Contraction continue du complexe de Rips***
Soit (G,S) un groupe $\delta-$ hyperbolique et soit $R \geq 4\delta$ tel que le complexe de Rips augmenté $C_*^R(G,\mathbb{C})$ soit contractile et soit $x \in G$.
Alors il existe une famille d'opérateurs linéaires :

$$h_*^x : C_*^R(G,\mathbb{Q}) \to C_{*+1}^R(G,\mathbb{Q})$$

vérifiant en degré $n \geq 1$:

$$h_*^x \circ \partial + \partial \circ h_*^x = \pi_{as}$$

et telle que :

1. *les opérateurs $(h_*^x)_{x\in G}$ sont compatibles avec l'action du groupe, dans le sens où le diagramme suivant commute pour tout $g \in G$:*

$$\begin{tikzcd} C_*(G,\mathbb{Q}) \arrow[r, "h_*^x"] \arrow[d, "\pi(g)"] & C_{*+1}(G,\mathbb{Q}) \arrow[d, "\pi(g)"] \\ C_*(G,\mathbb{Q}) \arrow[r, "h_*^{gx}"] & C_{*+1}(G,\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

2. *il existe une constante $C_{30}(\delta, \mid S \mid, R)$ telle que les coefficients de matrice $< h_n^x(\alpha), \beta >$ sont nuls sauf éventuellement lorsque*

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$$

   et il existe une constante $C_{31}(\delta, \mid S \mid, R)$ telle que :

$$|< h_n^x(\alpha), \beta >| \leq C_{31}$$

3. *il existe des constantes $C_{32}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'))$ et $\lambda_4(\delta, \mid S \mid)$ telles que pour tous $\alpha, \beta \in \Delta_n^R$:*

$$|< (h_n^x - h_n^{x'})(\alpha), \beta >| \leq C_{32}\lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$$

   avec $0 \leq \lambda_4(\delta, \mid S \mid) = Max(\lambda_2(\delta, \mid S \mid), \lambda_3(\delta, \mid S \mid)) < 1$

4. *$\pi_{as} \circ h_*^x = h_*^x$*

Preuve : 1ère étape : Notons q_1 le bicombing de Mineyev construit dans le Théorème 5.13 et construisons par récurrence un morphisme différentiel de chaîne :

$$\Theta_* : C_*(G,\mathbb{Q}) \to C_*(G,\mathbb{Q})$$

égal à l'identité en degré zéro.
Commençons par poser $\Theta_1 = q_1$. Puis construisons Θ_n par récurrence en posant pour tout simplexe

$$\Theta_n([x_0,...,x_n]) = (\nu_{x_0,x_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n])$$

$$\begin{tikzcd} C_n(G,\mathbb{Q}) \arrow[r, "\Theta_n"] \arrow[d, "\partial"'] & C_n(G,\mathbb{Q}) \arrow[d, shift right, "\partial"'] \\ C_{n-1}(G,\mathbb{Q}) \arrow[r, "\Theta_{n-1}"] & C_{n-1}(G,\mathbb{Q}) \arrow[u, shift right, "\nu_{x_0,x_1}"'] \end{tikzcd}$$

On suppose que Θ_{n-1} est bien un morphisme différentiel de chaîne $G-$équivariant. Alors montrons qu'il en est de même pour Θ_n. Nous savons que pour tout $(x_0,x_1) \in G^2$, ν_{x_0,x_1} est une homotopie contractante donc $\partial \circ \nu_{x_0,x_1} = Id - \nu_{x_0,x_1}$. Il vient, pour tout simplexe $[x_0,...,x_n]$:

$$\begin{gathered} (\partial \circ \Theta_n)([x_0,...,x_n]) = (\partial \circ \nu_{x_0,x_1}) \circ (\Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n]) = \\ (Id - \nu_{x_0,x_1} \circ \partial) \circ (\Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n]) \\ = (\Theta_{n-1} \circ \partial - \nu_{x_0,x_1} \circ \partial \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n]) \\ = (\Theta_{n-1} \circ \partial - \nu_{x_0,x_1} \circ \Theta_{n-2} \circ \partial \circ \partial)([x_0,...,x_n]) = (\Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n]) \end{gathered}$$

Par ailleurs, soit $g \in G$ et un simplexe $[x_0,...,x_n]$:

$$\begin{gathered} \Theta_n([gx_0,...,gx_n]) = (\nu_{gx_0,gx_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([gx_0,...,gx_n]) \\ = (\nu_{gx_0,gx_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial \circ \pi(g))([x_0,...,x_n]) \\ = (\nu_{gx_0,gx_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \pi(g) \circ \partial)([x_0,...,x_n]) \\ = (\nu_{gx_0,gx_1} \circ \pi(g) \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n]) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ = (\pi(g) \circ \nu_{x_0,x_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0,...,x_n]) \text{ par équivariance de } (\nu_{x,y}) \\ = g\Theta_n([x_0,...,x_n]) \end{gathered}$$

2ème étape : Définissons h_*^x et montrons que $h_*^x \circ \partial + \partial \circ h_*^x = \pi_{as}$.
Soient l'inclusion canonique $i_* : C_*^R(G,\mathbb{Q}) \to C_*(G,\mathbb{Q})$ et un point de base $x \in G$. Posons :

$$\boldsymbol{h_*^x = \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)}$$

où η_* est le morphisme de complexes différentiels défini en 5.22, s_x est l'homotopie contractante définie en 4.17 et h l'opérateur d'homotopie défini en 4.18.
Par construction, on a $\pi_{as} \circ h_*^x = h_*^x$ car π_{as} est un projecteur (Cf. 5.23).

On sait que $\partial \circ \pi_{as} = \pi_{as} \circ \partial$,que $\partial \circ \eta_n = \eta_{n-1} \circ \partial$ et que $h(\Theta_* \circ i_*, i_*) \circ \partial + \partial \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*) = i_* - \Theta_* \circ i_*$ d'où :

$h_*^x \circ \partial + \partial \circ h_*^x$
$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* \circ \partial + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*) \circ \partial + \partial \circ \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* + \partial \circ \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)$

$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* \circ \partial + \partial \circ \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*) \circ \partial + \partial \circ \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)$
$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ (s_x \circ \partial + \partial \circ s_x) \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ (h(\Theta_* \circ i_*, i_*) \circ \partial + \partial \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*))$
$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ (i_* - \Theta_* \circ i_*)$
$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ i_*$
$= \pi_{as}$ car par construction $\eta_* = i_*$ sur $C_*^R(G, \mathbb{Q})$

3ème étape : Démontrons la compatibilité de h_*^x avec l'action de groupe
Toutes les applications présentes dans l'écriture de h_*^x sont $G-$ équivariante, à l'exception de s_x. Il vient :

$\pi(g) \circ h_*^x \circ \pi(g^{-1}) = \pi(g) \circ (\pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)) \circ \pi(g^{-1})$
$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ \pi(g) \circ s_x \circ \pi(g^{-1}) \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)) \circ \pi(g) \circ \pi(g^{-1})$

Or, nous avons prouvé dans la Proposition 4.17 la compatibilité de s_x avec l'action du groupe donc :

$\pi(g) \circ h_*^x \circ \pi(g^{-1})$
$= \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_{gx} \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)$
$= h_*^{gx}$ par construction

4ème étape : Montrons que :

1. $\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(C_{n-1}^R(G, \mathbb{Q})) \subset C_n^{C_{14}(\delta,R,n)}(G, \mathbb{Q})$
2. $Supp(\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha)) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}(\delta, R, n))$
3. $\|\Theta_n(\alpha')\|_1 \leq C_{16}(\delta, R, n)$ pour tout $\alpha' \in \Delta_n^R(G)$

Nous allons démontrer ces trois propriétés par récurrence.
Pour $n = 1$:

$$\Theta_1 \circ s_x \circ i_0([x_0]) = \Theta_1 \circ s_x([x_0]) = \Theta_1([x, x_0]) = q_1([x, x_0])$$

Or, d'après le Théorème 5.13 : $q_1([x, x_0]) \in C_1^1(G, \mathbb{Q})$ et $Supp(q_1([x, x_0])) \subset B(geod(\{x, x_0\}), 18\delta)$.
Il suffit donc de poser $C_{14}(\delta, R, 1) = 1$ et $C_{15}(\delta, R, 1) = 18\delta$
Pour la troisième inégalité, d'après le quatrième point du Théorème 5.13, on sait que si $\alpha = [x_0, x_1] \in \Delta_1^R(G)$ alors :

$$\|q_1 [x_0, x_1]\|_1 \leq 18\delta R$$

Il suffit donc de poser $C_{16}(\delta, R, 1) = 18\delta R$.

Supposons les trois propriétés vraies à un certain rang $n - 1$, montrons qu'elles sont vraies au rang n.
D'après le Lemme 5.25 :

$$geod(Supp(s_x \circ i_{n-1}(\alpha))) \subset B(geod\{x, x_0\}, R+\delta)$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$Supp(\Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha)) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}(\delta, R, n-1))$$

De plus : $Supp(\partial \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha)) = Supp(s_x \circ i_{n-1}(\alpha))$
D'où :

$Supp(\Theta_{n-1} \circ \partial \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha)) \subset B(B(geod\{x, x_0\}, R+\delta), C_{15}(\delta, R, n-1))$
$\subset B(geod\{x, x_0\}, R+\delta+C_{15}(\delta, R, n-1))$

Par construction $\Theta_n([x_0, x_1, ..., x_n]) = (\nu_{x_0,x_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([x_0, x_1, ..., x_n])$ d'où :

$\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}([x_0, x_1, ..., x_n]) = \Theta_n([x, x_0, x_1, ..., x_n])$
$= (\nu_{x,x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial)([x, x_0, x_1, ..., x_n])$
$= (\nu_{x,x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial \circ s_x \circ i_{n-1})([x_0, x_1, ..., x_n])$
$= \nu_{x,x_0}(\Theta_{n-1} \circ \partial \circ s_x \circ i_{n-1}([x_0, x_1, ..., x_n]))$

Or, d'après la Proposition 5.18, si un simplexe $\alpha \in C_n^R(G, \mathbb{Q})$ vérifie $Supp(\alpha) \subset B(geod\{x, y\}, r)$ alors :

1. $\nu_{x,y}(\alpha) \in C_*^{R+4r+12\delta}(G, \mathbb{Q})$
2. $Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), 2R+6r+16\delta)$
3. $\|\nu_{x,y}(\alpha)\|_1 \leq C_7(\delta, R, r, n)$

Donc :

1. $\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha) \in C_*^{C_{14}(\delta,R,n-1)+4(R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1))+12\delta}(G, \mathbb{Q})$
2. $Supp(\nu_{x,y}(\alpha)) \subset B(Supp(\alpha), 2C_{14}(\delta, R, n-1)+6(R+\delta+C_{15}(\delta, R, n-1))+16\delta)$
3. pour tout $\alpha' = [x_0, x_1, ..., x_n] \in \Delta_n^R(G)$:

   $\|\Theta_n([x_0, x_1, ..., x_n])\|_1 = \|\nu_{x_0,x_1} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial([x_0, x_1, ..., x_n])\|_1$
   $\leq C_7(\delta, C_{14}(\delta, R, n-1), R+\delta+C_{15}(\delta, R, n-1), n-1) \times \|\Theta_{n-1} \circ \partial([x_0, x_1, ..., x_n])\|_1$
   $\leq C_7(\delta, C_{14}(\delta, R, n-1), R+\delta+C_{15}(\delta, R, n-1), n-1) \times (n+1) \times C_{16}(\delta, R, n-1)$

Les trois propriétés sont ainsi démontrées par récurrence.

5ème étape : Soient $\beta \in \Delta_n(G)$ et $R_1, R_2 > 0$. Soit :

$$Y_\beta(R_1, R_2) = \{\beta' \in \Delta_{n-1}(G), diam(\beta') \leq R_1, Supp(\beta') \subset B(Supp(\beta), R_2)\}$$

Intéressons-nous au cardinal de $Y_\beta(R_1, R_2)$.
Supposons que $\beta = [b_0, ..., b_n]$ et que $\beta' = \left[b'_0, ..., b'_{n-1}\right] \in Y_\beta(R_1, R_2)$.
$b'_0 \in B(Supp(\beta), R_2)$ donc il existe $i \in \{0, ..., n\}$ tel que $d(b_i, b'_0) \leq R_2$.
b_i étant fixé, il existe au plus $(1+ \mid S \mid)^{R_2}$ choix pour b'_0.
Par ailleurs, il existe $(n+1)$ choix possible pour b_i, d'où $(n+1)\cdot(1+ \mid S \mid)^{R_2}$ choix possibles pour b'_0.
Pour b'_0 fixé, nous savons que pour $i \in \{1, ..., n-1\}$, $d(b'_0, b'_i) \leq R_1$. Il existe donc au plus $(1+ \mid S \mid)^{R_1}$ choix possibles pour chaque b'_i.
Pour résumer, il existe au plus

$$\mid Y_\beta(R_1, R_2) \mid \leq (n+1) \cdot (1+ \mid S \mid)^{R_2} \cdot (1+ \mid S \mid)^{(n-1)R_1} = C_{17}(\mid S \mid, n, R_1, R_2)$$

6ème étape : Majoration des coefficients de matrice de $\Theta_* \circ s_x \circ i_*$
Nous allons montrer que pour tous simplexes $\alpha \in \Delta^R_{n-1}(G)$ et $\beta \in \Delta^R_n(G)$

1. $< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}(\delta, R, n-1)$
2. $|< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >| \leq C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

Nous avons prouvé dans la 4ème étape que

$$Supp(\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha)) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}(\delta, R, n))$$

d'où le premier point.
Nous allons maintenant démontrer la majoration par récurrence sur n.
Si $n = 1$ alors, comme montré dans la 4ème étape : $\Theta_1 \circ s_x \circ i_0([x_0]) = q_1([x, x_0])$.
D'où :

$$|< \Theta_1 \circ s_x \circ i_0(\alpha), \beta >=|< q_1([x, x_0]), \beta >$$

D'après 5.14, il existe une constante $C_0(\delta)$ telle que $|< q_1([x, x_0]), \beta >\leq C_0(\delta)$. Il suffit donc de poser $C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, 0) = C_0(\delta)$.

Supposons l'inégalité vérifiée au rang $n-1$ et montrons qu'elle est alors vraie au rang n.
Soient deux simplexes $\alpha = [x_0, ..., x_n] \in \Delta^R_{n-1}(G)$ et $\beta \in \Delta^R_n(G)$.

$$\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}([x_0, ..., x_n]) = \Theta_n([x, x_0, ..., x_n]) = \nu_{x,x_0}(\Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]))$$

Or $\Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]) \in C^R_{n-1}(G, \mathbb{Q})$ donc s'écrit :

$$\Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]) = \sum_{\gamma \in \Delta_{n-1}} < \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]), \gamma > \gamma$$

Il vient :

$$\Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}([x_0,...,x_n]) = \nu_{x,x_0}(\sum_{\gamma\in\Delta_{n-1}} < \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma > \gamma)$$

$$\sum_{\gamma\in\Delta_{n-1}} < \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma > \nu_{x,x_0}(\gamma)$$

Et :

$$\begin{aligned}
&|< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >| \\
&=| \sum_{\gamma\in\Delta_{n-1}} < \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma >< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >| \\
&\leq \sum_{\gamma\in\Delta_{n-1}} |< \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma >| \cdot |< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >|
\end{aligned}$$

Or, d'après l'étape précédente :

1. $\Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]) \in C_{n-1}^{C_{14}(\delta,R,n-1)}(G,\mathbb{Q})$ donc
$$|< \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma >= 0 \text{ sauf éventuellement si } diam(\gamma) \leq C_{14}(\delta,R,n-1)$$
2. $Supp(\Theta_{n-1}\circ\partial([x,x_0,...,x_n])) \subset B(geod\,\{x,x_0\}\,, R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1))$ donc
$|< \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma >= 0$ sauf éventuellement si
$$Supp(\gamma) \subset B(geod\,\{x,x_0\}\,, R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1))$$

et d'après 5.18 :

1. $\nu_{x,x_0}(\gamma) \in C_*^{C_{14}(\delta,R,n-1)+4(R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1))+12\delta}(G,\mathbb{Q})$ car $Supp(\gamma) \subset B(geod\,\{x,x_0\}\,, R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1))$ et $diam(\gamma) \leq C_{14}(\delta,R,n-1)$. Donc
$$< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >= 0 \text{ si } diam(\beta) > C_{17}(\delta,R,n)$$
avec :
$$C_{17}(\delta,R,n) = C_{14}(\delta,R,n-1) + 4(R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1)) + 12\delta$$
2. $Supp(\nu_{x,x_0}(\gamma)) \subset B(Supp(\gamma), 2C_{14}(\delta,R,n-1)+6(R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1))+16\delta)$ pour les mêmes raisons. Donc $< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), C_{18}(\delta,R,n))$ avec :
$$C_{18}(\delta,R,n)) = 2C_{14}(\delta,R,n-1) + 6(R+\delta+C_{15}(\delta,R,n-1)) + 16\delta$$

Par conséquent :
$\sum_{\gamma\in\Delta_{n-1}} |< \Theta_{n-1} \circ \partial([x,x_0,...,x_n]), \gamma >| \cdot |< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >|$ s'annule sauf

éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), C_{18}(\delta,R,n))$ et $diam(\gamma) \leq$

$C_{14}(\delta, R, n-1)$.

Montrons qu'alors $Supp(\gamma) \subset B(Supp(\beta), C_{18} + C_{14})$.
Soit $\gamma_i \in Supp(\gamma)$ et soit $b_j \in Supp(\beta)$ tels que $d(\gamma_i, b_j) = d(\gamma_i, Supp(\beta))$.
$b_j \in Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), C_{18})$ donc il existe $\gamma_k \in Supp(\gamma)$ tel que $d(\gamma_k, b_j) \leq C_{18}$.
Ainsi : $d(\gamma_i, b_j) = d(\gamma_i, Supp(\beta)) \leq d(\gamma_i, \gamma_k) + d(\gamma_k, b_j) \leq C_{14} + C_{18}$.

On en déduit que les termes sont non nuls lorsque $\gamma \in Y_\beta = Y_\beta(C_{14}, C_{19}))$ avec

$$C_{19}(\delta, R, n) = 3C_{14}(\delta, R, n) + 6(R + \delta + C_{15}(\delta, R, n-1) + 16\delta$$

$\sum_{\gamma \in \Delta_{n-1}} |< \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]), \gamma >| \cdot |< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >|$ s'annule sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), C_{18}(\delta, R, n))$ et $diam(\gamma) \leq C_{14}(\delta, R, n-1)$.

Le nombre de termes dans la somme

$$\sum_{\gamma \in \Delta_{n-1}} |< \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]), \gamma >| \cdot |< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >|$$

est donc majoré par le cardinal de $Y_\beta(C_{14}, C_{19}))$, c'est-à-dire par

$$C_{191}(\delta, | S |, R, n) = C_{17}(n, | S |, C_{14}(\delta, R, n-1), C_{19}(\delta, R, n)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
&|< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >| \\
&\leq \sum_{\gamma \in \Delta_{n-1}} |< \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]), \gamma >| \cdot |< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >| \\
&\leq C_{191}(\delta, | S |, R, n) \max_{\gamma \in Y_\beta} |< \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]), \gamma >| \cdot |< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >|
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]) \\
&= \Theta_{n-1}([x_0, ..., x_n]) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Theta_{n-1}([x, x_0, ..., x_{i-1}, ..., x_{i+1}, ..., x_n])
\end{aligned}$$

Donc $|< \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_n]), \gamma >| \leq (n+1)C_{16}(\delta, R, n-1)$. Par ailleurs, d'après la Proposition 5.18 :

$$|< \nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >| \leq C_7(\delta, C_{14}(\delta, R, n), C_{15}(\delta, R, n) + R + \delta, n)$$

Pour conclure :

$$|< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >| \leq C_{20}(\delta, | S |, R, n)$$

avec :

$C_{20}(\delta, | S |, R, n) = (n+1) \cdot C_{191}(\delta, | S |, R, n) C_{16}(\delta, R, n-1)$
$\cdot C_7(\delta, C_{14}(\delta, R, n), C_{15}(\delta, R, n) + R + \delta, n)$

7ème étape : Montrons qu'il existe des constantes $C_{28}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n)$ et $0 \leq \lambda_4(\delta, | S |) < 1$ telles que pour tous simplexes $\alpha \in \Delta^R_{n-1}(G)$ et $\beta \in \Delta^R_n(G)$:

$$|< \Theta_n \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >| \leq C_{28} \cdot \lambda_4^{d(x, Supp(\beta))}$$

Montrons cette inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 1$: soit $\alpha = [x_0] \in \Delta^R_0(G)$ et $\beta = [u, v] \in \Delta^R_1(G)$. Alors :

$|< \Theta_1 \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_0([x_0]), [u, v] >| = |< q_1 \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_0([x_0]), [u, v] >|$
$= |< q_1([x, x_0]) - q_1([x, x_0]), [u, v] >|$ car q_1 est linéaire
$= |< q_1([x, x_0]), [u, v] > - < q_1([x', x_0]), [u, v] >|$

Or, d'après le Théorème 5.13 : $Supp(q_1([x, x_0])) \subset B(geod(\{x_0, x\}), 18\delta)$
Donc $< q_1([x, x_0]), [u, v] >$ sauf éventuellement lorsque $[u, v] \in B(geod(\{x_0, x\}), 18\delta)$
et $|< \Theta_1 \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_0([x_0]), [u, v] >| = 0$ sauf éventuellement lorsque $\{u, v\} \subset B(geod(\{x_0, x\}), 18\delta) \cup B(geod(\{x_0, x'\}), 18\delta)$
Par hyperbolicité, on montre que si $d(x, \{u, v\}) \geq d(x, x') + 19\delta$ alors :

$$B(geod(\{x_0, x'\}), 18\delta) \subset B(geod(\{x_0, x\}), 19\delta)$$

Dans toute la suite, nous supposerons que $d(x, supp(\beta)) \geq d(x, x') + 19\delta$. Ainsi, lorsque $d(x, Supp(\beta)) \geq d(x, x') + 19\delta$ alors $|< \Theta_1 \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_0([x_0]), [u, v] >| = 0$ sauf éventuellement lorsque

$$\{u, v\} \subset B(geod(\{x_0, x\}), 19\delta)$$

D'après la Proposition 5.14, il existe des constantes $C_1(\delta, | S |)$ et $0 \leq \lambda_1(\delta, | S |) < 1$ telles que :

$$|< q([x_0, x]) - q([x_0, x']), [u, v] >| \leq C_1 . d(x, x') . \lambda_1^{(x|x')_u}$$

Remarquons que l'inégalité reste vraie si l'on suppose $\frac{1}{2} \leq \lambda_1 < 1$. Nous le supposerons par la suite (et alors $1 < \lambda_1^{-1} \leq 2$.
On démontre par simple inégalité triangulaire que :

$$d(x, u) - d(x, x') \leq (x \mid x')_u$$

D'où :

$|< \Theta_1 \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_0([x_0]), [u,v] >|=|< q([x_0,x]) - q([x_0,x']), [u,v] >|$
$\leq C_1.d(x,x').\lambda_1^{-d(x,x')}\lambda_1^{d(x,u)}$
$\leq C_1.d(x,x').\lambda_1^{-d(x,x')}\lambda_1^{d(x,\{u,v\})}$
$\leq C_1.d(x,x').2^{d(x,x')}\lambda_1^{d(x,Supp(\beta)} = C_{28}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), 1) \cdot \lambda_1^{d(x,Supp(\beta)}$

Supposons maintenant l'inégalité vérifiée au rang $n-1$ et montrons qu'elle est vraie au rang n.
Posons $\alpha = [x_0, ..., x_{n-1}] \in \Delta_{n-1}^R(G)$

$\Theta_n \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-1}(\alpha) = \Theta_n([x, x_0, ..., x_{n-1}]) - \Theta_n([x', x_0, ..., x_{n-1}])$
$= \nu_{x,x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial([x, x_0, ..., x_{n-1}]) - \nu_{x',x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ \partial([x', x_0, ..., x_{n-1}])$

Or :

$\partial([x, x_0, ..., x_{n-1}]) = [x_0, ..., x_{n-1}] - \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i \, [x, x_0, ..., \tilde{x_i}, ..., x_{n-1}]$

$= [x_0, ..., x_{n-1}] - \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)$

d'où :

$\Theta_n \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-1}(\alpha)$
$= (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1}(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\nu_{x,x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha) - \nu_{x',x_0} \circ$
$\Theta_{n-1} \circ s_{x'} \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha))$
$= (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1}(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha) -$
$\sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i \nu_{x',x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha))$

a) Majoration de $|< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha), \beta >|$

Nous savons que

$$\Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha) = \sum_{\gamma \in \Delta_{n-1}} < \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha), \gamma > \gamma$$

D'où :

$< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha), \beta >$
$= \sum\limits_{\gamma \in \Delta_{n-1}} < \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha), \gamma >< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0})(\gamma), \beta >$

D'après la 4ème étape, $< \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha), \gamma >= 0$ sauf éventuellement lorsque :

1. $diam(\gamma) \leq C_{14}(\delta, R, n)$
2. et $Supp(\gamma) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}(\delta, R, n))$

D'après le Lemme 5.26 :

$$B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}) \subset B(geod(\{x, x_0\}), C_{15} + R + \delta)$$

Donc d'après la Proposition 5.18 $< (\nu_{x,x_0}(\gamma), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), 2C_{14} + 6(C_{15} + R + \delta) + 16\delta)$$

De même d'après le Lemme 5.26 :

$$B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}) \subset B(geod(\{x', x_0\}), C_{15} + R + d(x, x') + 2\delta)$$

Donc : $< (\nu_{x',x_0}(\gamma), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), 2C_{14} + 6(C_{15} + R + d(x, x') + 2\delta) + 16\delta)$$

Il vient :

$$< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0})(\gamma), \beta >= 0$$

sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(Supp(\gamma), 2C_{14} + 6(C_{15} + R + d(x, x') + 2\delta) + 16\delta)$$

ou, d'après le Lemme 5.27, lorsque :

$$Supp(\gamma) \subset B(Supp(\beta), C_{21})$$

avec $C_{21}(\delta, R, n, d(x, x')) = 3C_{14} + 6(C_{15} + R + d(x, x') + 2\delta) + 16\delta$.

Posons $Y'_\beta = Y_\beta(C_{14}, C_{21})$. D'après la 5ème étape :

$$| Y'_\beta | \leq C_{22}(\delta, | S |, R, n)$$

avec $C_{22}(\delta, | S |, R, n) = C_{17}(| S |, n, C_{14}(\delta, R, n), C_{21}(\delta, R, n, d(x, x')))$.

Finalement :

$|< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i\alpha), \beta >|$
$\leq \sum_{\gamma \in Y'_\beta} |< \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i\alpha), \gamma >| \cdot |< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0})(\gamma), \beta >|$

$\leq \sum_{\gamma \in Y'_\beta} C_{20}(\cdot |< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0})(\gamma), \beta >|$ d'après l'étape 6.

$\leq C_{20} \sum_{\gamma \in Y'_\beta} \cdot C_{11}(\delta, | S |, C_{14}, C_{15} + \delta + R, , n-1, d(x,x'))\lambda_3^{d(x,x_0) - d(Supp(\gamma), x_0)}$

Or, d'après 5.28 : $d(x,x_0) - d(Supp(\gamma), x_0) \geq d(x, Supp(\gamma)) - 2(C_{15} + R + \delta)$.
Par ailleurs, soit $\gamma_i \in Supp(\gamma)$ tel que $d(x,\gamma_i) = d(x, Supp(\gamma))$. Alors $\gamma_i \in B(Supp(\beta), C_{21})$ et il existe $\beta_i \in Supp(\beta)$ tel que $d(\gamma_i, \beta_i) \leq C_{21}$.
Il vient :

$$d(x, Supp(\beta)) \leq d(x,\beta_i) \leq d(x,\gamma_i) + d(\gamma_i,\beta_i) \leq d(x, Supp(\gamma)) + C_{21}$$

Ainsi :

$$d(x,x_0) - d(Supp(\gamma), x_0) \geq d(x, Supp(\beta)) - C_{23}$$

Avec $C_{23}(\delta, R, n, d(x,x')) = C_{21}(\delta, R, n, d(x,x')) + 2(C_{15}(\delta, R, n-1) + R + \delta)$
Pour conclure :

$|< (\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1} \circ s_x \circ i_{n-2}(\partial_i\alpha), \beta >|$
$\leq C_{20} \sum_{\gamma \in Y'_\beta} \cdot C_{11}(\delta, | S |, C_{14}, C_{15} + \delta + R, , n-1, d(x,x'))\lambda_3^{d(x, Supp(\beta)) - C_{23}}$

$\leq C_{20} \cdot C_{11}(\delta, | S |, C_{14}, C_{15} + \delta + R, n-1, d(x,x'))\lambda_3^{-C_{23}} \sum_{\gamma \in Y'_\beta} \lambda_3^{d(x, Supp(\beta))}$

$\leq C_{25}(\delta, | S |, R, n, d(x,x'))\lambda_3^{d(x, Supp(\beta))}$

avec : $C_{25}(\delta, | S |, R, n, d(x,x')) =$
$C_{20}(\delta, | S |, R, n) \cdot C_{11}(\delta, | S |, C_{14}, C_{15} + \delta + R, n-1, d(x,x')) \cdot 2^{C_{23}} \cdot C_{22}(\delta, | S |, R, n)$
car on peut supposer que $\frac{1}{2} \leq \lambda_3 < 1$.

b) Avec les mêmes arguments, on obtient le même type de majoration pour $(\nu_{x,x_0} - \nu_{x',x_0}) \circ \Theta_{n-1}(\alpha)$.

c) Majoration de $|< \nu_{x',x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i\alpha)), \beta >|$

$$< \nu_{x',x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \beta >$$
$$= \sum_{\gamma \in \Delta_{n-1}(G)} < \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \gamma > \cdot < \nu_{x',x_0}(\gamma), \beta >$$

Or $< \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \gamma >= 0$ sauf éventuellement lorsque :

1. $diam(\gamma) \leq C_{14}((\delta, R, n)$
2. et $Supp(\gamma) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}) \subset B(geod(\{x_0, x'\}), C_{15} + R + \delta)$

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées alors $< \nu_{x',x_0}(\gamma), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $\gamma \in Y'_\beta$ tel que défini dans a).
Il vient :

$$|< \nu_{x',x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \beta >|$$
$$\leq \sum_{\gamma \in Y'_\beta} |< \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \gamma >| \cdot |< \nu_{x',x_0}(\gamma), \beta >|$$
$$\leq C_{26} \cdot \sum_{Y'_\beta} |< \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \gamma >|$$

avec $C_{26}(\delta, R, n) = C_7(\delta, C_{14}(\delta, R, n), , C_{15} + R + \delta, n-1)$ d'après le point 5 de la Proposition 5.18.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|< \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \gamma >| \leq C_{30}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n-1) \lambda_4^{d(x, Supp(\gamma))}$$

D'où :

$$|< \nu_{x',x_0} \circ \Theta_{n-1} \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-2}(\partial_i \alpha)), \beta >|$$
$$\leq C_{26} \cdot C_{30} \cdot C_{22} \cdot \lambda_4^{d(x, Supp(\gamma))} \leq C_{26} \cdot C_{30} \cdot C_{22} \cdot \lambda_4^{-R - C_{21}} \cdot \lambda_4^{d(x, Supp(\beta))}$$
$$\leq C_{26} \cdot C_{30} \cdot C_{22} \cdot 2^{-R - C_{21}} \cdot \lambda_4^{d(x, Supp(\beta))}$$
$$\leq C_{28}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n) \cdot \lambda_4^{d(x, Supp(\beta))}$$

Car, par inégalité triangulaire, on montre que :

$$d(x, Supp(\gamma)) \geq d(x, Supp(\beta)) - R - C_{21}$$

Et en posant :

$$C_{28}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n) =$$
$$C_{26}(\delta, R, d(x, x'), n) \cdot C_{30}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n-1) \cdot C_{22}(\delta, | S |$$
$$, R, d(x, x'), n) \cdot 2^{-R - C_{21}(\delta, R, d(x, x'), n)}$$

8ème étape : Démontrons les deux inégalités recherchées. Tout d'abord, rappelons que :

$$h_*^x = \pi_{as} \circ \eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_* + \pi_{as} \circ \eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)$$

Avec, comme dans le Lemme 4.18, pour tout simplexe $[x_0, ..., x_n] \in \Delta_n^R$:

$$h(\Theta_* \circ i_*, i_*)([x_0, ..., x_n]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [\Theta_i(x_0, ..., x_i), x_i, ..., x_n]$$

Par composition, si : $\eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_*([x_0, ..., x_n]) \in C_{n+1}^R(G, \mathbb{Q})$ et $\eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)([x_0, ..., x_n]) \in C_{n+1}^R(G, \mathbb{Q})$.

Soit $i \neq 0$ alors x_i s'obtient en multipliant x_0 par au plus R éléments de S. D'où :

$$\mid \Delta_n^R(G) \mid \leq C_{29}(\mid S \mid, R) \text{ avec } C_{29}(\mid S \mid, R) = \mid S \mid^R$$

Ainsi, si $n > C_{29}(\mid S \mid, R)$ alors il existe nécessairement deux entiers i et j tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Ce sera le cas pour tous les simplexes intervenant dans la décomposition de $\eta_* \circ \Theta_* \circ s_x \circ i_*([x_0, ..., x_n])$ et de $\eta_* \circ h(\Theta_* \circ i_*, i_*)([x_0, ..., x_n])$ dans $C_{n+1}^R(G, \mathbb{Q})$. Or l'image par π_{as} d'un simplexe ayant deux sommets identiques est nulle. Il vient :

$$h_n^x = 0 \text{ sur } C_n^R(G, \mathbb{Q}) \text{ si } n \geq C_{29}(\mid S \mid, R)$$

Par conséquent, nous n'étudierons h_n^x que pour $n < C_{29}(\mid S \mid, R)$.

$$< h_n^x(\alpha), \beta >=$$
$$< \pi_{as} \circ \eta_n \circ \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta > + < \pi_{as} \circ \eta_n \circ h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha), \beta >$$

a) Cherchons $C_{30}(\delta, \mid S \mid, R)$ tel que $< h_n^x(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$

$$< \pi_{as} \circ \eta_n \circ \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >$$
$$= \sum_{\beta' \in Y_\beta} < \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta' > \cdot < \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >$$

D'après l'étape 5, nous savons que $< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta' >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta') \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{15}(\delta, R, n))$.
Par ailleurs $\beta' \in Y_\beta$ donc :

$$diam(\beta') \leq C_{14}(\delta, R, n) \text{ et } Supp(\beta') \subset B(Supp(\beta), C_{19}(\delta, R, n))$$

Ainsi, $< h_n^x(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30}(\delta, \mid S \mid, R))$$

avec

$$C_{30}(\delta, \mid S \mid, R) = \max_{n \leq C_{29}(|S|, R)} C_{15}(\delta, R, n) + C_{19}(\delta, R, n)$$

(rappelons que $C_{19} \geq C_{14}$ par construction).

Intéressons nous maintenant à

$< \pi_{as} \circ \eta_n \circ h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha), \beta >$
$=< \pi_{as} \circ \eta_n (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\Theta_i(x_0, ..., x_i), x_i, ..., x_n]), \beta >$
$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i < \pi_{as} \circ \eta_n([\Theta_i(x_0, ..., x_i), x_i, ..., x_n]), \beta >$

Or, d'après l'étape 4, $\Theta_i(x_0, ..., x_i) \in C_i^{C_{14}(\delta, R, i)}$ avec $C_{14} \geq R$ donc $[\Theta_i(x_0, ..., x_i), x_i, ..., x_n] \in C_n^{C_{14}(\delta, R, n)}$.
Donc, d'après le Lemme 5.22 :

$Supp(\eta_n([\Theta_i(x_0, ..., x_i), x_i, ..., x_n])$
$\subset B(Supp(\alpha), C_{14}(\delta, R, n)) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30}(\delta, \mid S \mid, R))$

Par ailleurs, le support est conservé par π_{as}. D'où

$$< \pi_{as} \circ \eta_n([\Theta_i(x_0, ..., x_i), x_i, ..., x_n]), \beta >= 0$$

sauf éventuellement lorsque :

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30}(\delta, \mid S \mid, R))$$

b) Majoration de $|< h_n^x(\alpha), \beta >|$ si $\alpha \in \Delta_{n-1}^R(G)$ et $\beta \in \Delta_n^R(G)$

D'une part :

$|< \pi_{as} \circ \eta_n \circ \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta >|$
$\leq \sum_{\beta' \in Y_\beta} |< \Theta_n \circ s_x \circ i_{n-1}(\alpha), \beta' >| \cdot |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$

$\leq C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, n) \sum_{\beta' \in Y_\beta} |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$ d'après la 5ème étape

$\leq C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, n) \sum_{\beta' \in Y_\beta} \|\pi_{as} \circ \eta_n(\beta')\|$

$\leq C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, n) \sum_{\beta' \in Y'_\beta} \left\| \overline{\eta_n(\beta')} \right\|$ avec $Y'_\beta = \{\beta \in Y_\beta, \eta_n(\beta)$non dégénéré$\}$

$\leq C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, n) \cdot C_{13}(R, C_{14}(\delta, R, n), n) \cdot \mid Y_\beta \mid$ d'après le Lemme 5.22.
$\leq C_{310}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

avec $C_{310}(\delta, \mid S \mid, R, n) = C_{21}(\delta, \mid S \mid, R, n) \cdot C_{13}(R, C_{14}(\delta, R, n), n) \cdot C_{20}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

D'autre part :

$|< \pi_{as} \circ \eta_n \circ h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha), \beta >|$
$\leq \sum_{\beta' \in Y_\beta} |< h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha), \beta' >| \cdot |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$

$\leq \sum_{\beta' \in Y_\beta} \|h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha)\| \cdot |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$

Or : $\|h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha)\| \leq \sum_{j=0}^{n} \|(\Theta_* \circ i_*)_j)\| \cdot \|i_{n-j}\| \leq \sum_{j=0}^{n} C_{16}(\delta, R, j)$

Donc :

$|< \pi_{as} \circ \eta_n \circ h(\Theta_n \circ i_{n-1}, i_{n-1})(\alpha), \beta >|$
$\sum_{j=0}^{n} C_{16}(\delta, R, j) \cdot \sum_{\beta' \in Y_\beta} |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$

$\leq \sum_{j=0}^{n} C_{16}(\delta, R, j) \cdot C_{13}(R, C_{14}(\delta, R, n), n) \cdot C_{20}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

$\leq C_{311}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

Finalement :

$|< h_n^x(\alpha), \beta >|$
$\leq C_{310}(\delta, \mid S \mid, R, n) + C_{311}(\delta, \mid S \mid, R, n) = C_{312}(\delta, \mid S \mid, R, n)$
$\leq C_{31}(\delta, \mid S \mid, R)$ en posant $C_{31}(\delta, \mid S \mid, R) = \max_{n \leq C_{29}(|S|, R)} C_{312}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

c) Majoration de $|< (h_n^x - h_n^{x'})(\alpha), \beta >|$
Remarquons tout d'abord que :

$$(h_n^x - h_n^{x'})(\alpha) = \pi_{as} \circ \eta \circ \Theta \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-1}(\alpha)$$

Donc :

$|< (h_n^x - h_n^{x'})(\alpha), \beta >|$
$\leq \sum_{\beta' \in Y_\beta} |< \Theta_n \circ (s_x - s_{x'}) \circ i_{n-1}(\alpha), \beta' >| \cdot |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$

$\leq C_{28}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))} \sum_{\beta' \in Y_\beta} |< \pi_{as} \circ \eta_n(\beta'), \beta >|$ d'après la 6ème étape

$\leq C_{28}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))} \sum_{\beta' \in Y_\beta} \|\pi_{as} \circ \eta_n(\beta')\|$

$\leq C_{28}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))} \sum_{\beta' \in Y'_\beta} \left\|\overline{\eta_n(\beta')}\right\|$ avec

$Y'_\beta = \{\beta \in Y_\beta, \eta_n(\beta)$ non dégénéré$\}$

$\leq C_{28}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))} \cdot C_{13}(R, C_{14}(\delta, R, n), n) \cdot \mid Y_\beta \mid$ d'après le Lemme 5.22

$\leq C_{320}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

avec :

$C_{320}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n) =$
$C_{28}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))} \cdot C_{13}(R, C_{14}(\delta, R, n), n) \cdot C_{20}(\delta, \mid S \mid, R, n)$

Finalement :

$|< (h_n^x - h_n^{x'})(\alpha), \beta >| \leq C_{32}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'))\lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$

En posant $C_{32}(\delta, \mid S \mid, R) = \max_{n \leq C_{29}(|S|, R)} C_{320}(\delta, \mid S \mid, R, n) \square$

6 Construction du module de Fredholm

Notre objectif est de construire un module de Fredholm finiment sommable sur le groupe hyperbolique G. Nous montrerons dans le chapitre suivant que ce dernier représentera l'élément $\gamma \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de Kasparov.

Nous allons suivre essentiellement la construction de V. Lafforgue [Laf]. L'espace de Hilbert de notre module sera un espace de fonctions "carrés-intégrables" sur le complexe de Rips. La représentation de Γ correspond à son action naturelle sur le complexe de Rips. L'opérateur elliptique en question sera de la forme :

$$F_x = \partial + \tilde{h}_x$$

où :

- ∂ est le différentiel du complexe de chaîne de Rips
- $\tilde{h}_x$ est une homotopie contractante bien choisie du complexe de chaine de Rips.

Soit h^x l'homotopie de chaine contractante du complexe de Rips construite précédemment. Une difficulté est que cette dernière ne se prolonge pas en un opérateur linéaire borné sur $\mathscr{L}(\ell^2(\Delta_*^R(G))$. Afin de remédier à cela, il faudra conjuguer h_x avec l'opérateur non borné e^{td_x} pour $t >> 0$, où d_x désigne une fonction "distance à l'origine" sur le complexe de Rips. Cette conjugaison entrainera une décroissante exponentielle des coefficients de matrice en terme de distance à la diagonale.
Cependant, étant donné que la métrique de mots ne prend que des valeurs discrètes, les opérateurs $e^{td_x}h^x e^{-td_x}$ ne peuvent pas être équivariants à compacts près.
C'est pourquoi, il faudra également remplacer la métrique des mots par une nouvelle métrique quasi-isométrique et continue : la distance $\tilde{d}$ construite par Mineyev et Yu.
Enfin, l'homotopie contractante doit être de carré nul, cela conduira au choix pour l'homotopie :

$$\tilde{h}_x = h^x \circ \partial \circ h^x$$

et au choix pour l'opérateur "elliptique" :

$$F_{x,t} = e^{t\tilde{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)e^{-t\tilde{d}_x}$$

Á travers une étude des coefficients de matrice, nous montrons dans ce chapitre que le bimodule de Kasparov ainsi obtenu est en fait finiment sommable. Dans la dernière section, nous vérifierons que ce bimodule représente un élément γ dans la $K-$ théorie bivariante équivariante de Γ.

6.1 Une nouvelle distance sur les groupes hyperboliques

I. Mineyev et G. Yu ont construit une nouvelle distance $\widehat{d}$ sur les groupes hyperboliques avec des propriétés bien particulières (Cf. [MiYu]). Elle est notamment :

1. $G-$ invariante : $\widehat{d}(g.x, g.y) = \widehat{d}(x, y)$.
2. quasi-isométrique à la métrique des mots.
3. il s'agit d'une métrique "continue" en ce sens où la différence des distances de deux points à un troisième point éloigné devient une fonction continue en ce troisième point. C'est ce qu'exprime le deuxième point de 6.8 lorsque $d(x, y)$ devient grande.

Dans ce qui suivra, nous désignerons par $p\,[a, b]$ une géodésique, choisie de façon équivariante, de a à b dans Γ entre deux sommets a et b (si Γ désigne le graphe de Cayley du groupe G).

Dans ce qui suit, sont décrites les principales étapes de la construction de cette distance.

Définition 6.1. *Pour toute paire de sommets $a, b \in G$, on définit $r(a, b) \in \mathbb{Q}^+$ par :*

1. $r(a, a) = 0$
2. $r(a, b) = 1$ *lorsque* $0 < d(a, b) \leq 10\delta$
3. $r(a, b) = r(a, \overline{f}(b, a)) + 1$ *si* $d(a, b) > 10\delta$ *où* $r(a, \overline{f}(b, a))$ *est défini par linéarité sur la seconde variable et* $\overline{f}(b, a)$ *a été défini dans la Définition 5.5.*

Par linéarité, on définit $r(a, b)$ lorsque b est une 0-chaîne.

Remarque 6.2. *La proposition 2 de [MiYu] p 101 prouve la validité de cette définition.*

Remarque 6.3. *$r(a, b)$ compte le nombre d'itérations nécessaires dans la définition de $f(a, b)$ (Cf. 5.6) pour que les sommets obtenus se trouvent à une distance inférieure à 10δ de l'origine a. Rappelons qu'à chaque itération, nous obtenions des sommets plus proche d'environ 10δ de a que ne l'était le sommet précédent.*

Proposition 6.4. *Pour un groupe hyperbolique G la fonction*

$$r : G \times G \to \mathbb{Q}^+$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *r est $G-$équivariante*
2. *r est Lipschitz-équivalente à la métrique des mots :*
$$\frac{1}{20\delta} d(a, b) \leq r(a, b) \leq d(a, b) \text{ pour tout } (a, b) \in G \times G$$
3. *il existe des constantes $C \geq 0$ et $\mu \in [0; 1[$ telles que pour tout $(a, a', b, b') \in G^4$ avec $d(a, a') \leq 1$ et $d(b, b') \leq 1$:*
$$| r(a, b) - r(a', b) - r(a, b') + r(a', b') | \leq C\mu^{d(a,b)}$$

Preuve : Cf. [MiYu] Théorème 6 p. 105.

Proposition 6.5. *Il existe une constante $C_1 \geq 0$ telle que pour tout $(a, b) \in G^2$ et pour tout x sur une géodésique γ entre a et b dans le graphe de Cayley :*

$$| r(a, b) - r(a, x) - r(x, b) | \leq C_1$$

Proposition 6.6. *Soit $s : G \times G \to \mathbb{Q}^+$ définie par :*

$$s(a,b) = \frac{1}{2}\left[r(a,b) + r(b,a)\right]$$

alors il existe une constante C_2 telle que pour tout $(a,b,c) \in G^3$:

$$s(a,b) \leq s(a,c) + s(c,b) + C_2$$

Preuve : Cf. [MiYu] Proposition 11 p. 116.

Proposition 6.7. *Définissons $\widehat{d} : G \times G \to \mathbb{Q}^+$ par :*

$$\widehat{d}(a,b) = \begin{cases} s(a,b) + C_2 & si\ a \neq b \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Alors $\widehat{d}$ définit une distance équivariante sur G. De plus, il existe des constantes $C \geq 0$ et $\mu \in [0;1[$ telles que :
$\forall R \geq 0, \forall (a,a',b,b') \in G^4$ tels que $d(a,a') \leq R$ et $d(b,b') \leq R$, on a :

$$\mid \widehat{d}(a,b) - \widehat{d}(a',b) - \widehat{d}(a,b') + \widehat{d}(a',b') \mid \leq R^2 C \mu^{d(a,b)-2R}$$

Preuve : Cf. [MiYu] Propositions 12 et 13 p. 116

Théorème 6.8. *Soit (G,S) un groupe $\delta-$ hyperbolique muni de la métrique des mots $d = d_S$. Alors la métrique $\widehat{d}$ définie ci-dessus vérifie :*

1. *elle est quasi-isométrique à d :*

   $$\frac{1}{20\delta} d(x,y) \leq \widehat{d}(x,y) \leq d(x,y) + C_1 \text{ pour tout } (x,y) \in G^2$$

   où $C_1 = C_1(\delta, \mid S \mid)$
2. $$\sup_{d(x,x')=d(y,y')=1} \mid \widehat{d}(x,y) - \widehat{d}(x',y) - \widehat{d}(x,y') + \widehat{d}(x',y') \mid \leq C_2 \lambda_2^{d(x,y)}$$

   où $C_2 = C_2(\delta, \mid S \mid) > 0$ et $\lambda_2 = \lambda_2(\delta, \mid S \mid) < 1$
3. *il existe une constante $C_3 = C_3(\delta, \mid S \mid) > 0$ telle que pour tous $x, y \in G$ et tout $z \in geod(\{x,y\})$:*

   $$\mid \widehat{d}(x,z) + \widehat{d}(z,y) - \widehat{d}(x,y) \mid \leq C_3$$

Preuve : Les deux premières assertions proviennent de 6.4. La dernière est une conséquence directe de 6.5. Le parcours attentif des différentes constructions des constantes dans les preuves de [MiYu] montre que les constantes construites ne dépendent que de δ et du cardinal de S.

Dans la suite, nous allons utiliser la distance définie ci-dessus afin de construire un module de Fredholm qui présentera des propriétés intéressantes (en vue de représenter l'élément gamma).

6.2 Estimation des coefficients de matrice

Définition 6.9. *Soit* (G,S) *un groupe* $\delta-$*hyperbolique. Soient :*

1. $\widehat{d}$ *la distance de Mineyev-Yu introduite dans la Proposition 6.7*
2. $x \in G$ *un point de base auxiliaire*
3. h^x *l'homotopie de chaine contractante construite dans le Théorème 5.29*
4. $t \in \mathbb{R}$

On définit les opérateurs linéaires suivants :

$$1.\ e^{t\hat{d}_x} : C_*^R(G,\mathbb{C}) \to C_*^R(G,\mathbb{C})$$

$$\alpha \longmapsto e^{t\hat{d}(x,Supp(\alpha))}\alpha$$

$$2.\ F_{x,t} : C_*^R(G,\mathbb{C}) \to C_{*\pm 1}^R(G,\mathbb{C})$$

$$\alpha \mapsto e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)e^{-t\hat{d}_x}(\alpha)$$

Lemme 6.10. *Soient deux simplexes* $\alpha, \beta' \in \Delta_n^R$ *et* $C > 0$*. Si*

$$Supp(\beta') \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C)$$

alors :

$$d(x, Supp(\beta')) \leq d(x, Supp(\alpha)) + C + R + \delta$$

Preuve : Soient $\alpha = [x_0, ..., x_n]$ et si $\beta' = [\beta'_0, ..., \beta'_n]$. Soient $i, j \in \{0, ..., n\}$ tels que $d(x, Supp(\alpha)) = d(x, x_i)$ et $d(x, Supp(\beta)) = d(x, \beta'_j)$.
$\beta'_j \in Supp(\beta') \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C)$ donc il existe $z_j \in geod(Supp(\alpha) \cup \{x\})$ tel que $d(\beta'_j, z_j) \leq C$.

1er cas : il existe $k, l \in \{0, ..., n\}$ tels que $z_j \in [x_k, x_l]$ pour une géodésique reliant x_k et x_l.

$d(x, Supp(\beta)) = d(x, \beta'_j) \leq d(\beta'_j, z_j) + d(z_j, x)$
$\leq C + d(z_j, x_i) + d(x_i, x)$
$\leq C + (R + \delta) + d(x, Supp(\alpha))$ par hyperbolicité

2ème cas : il existe $k \in \{0, ..., n\}$ tels que $z_j \in [x, x_k]$ pour une géodésique reliant x et x_k. Par hyperbolicité dans le triangle formé par x, x_k et x_i :

1. soit z_j est à une distance de $[x_i, x_k]$ inférieure à δ et il existe $w_j \in [x_i, x_k]$ tel que $d(z_j, w_j) \leq \delta$. On a alors :

   $d(x, Supp(\beta)) = d(x, \beta'_j)$
   $\leq d(\beta'_j, z_j) + d(z_j, w_j) + d(w_j, x_i) + d(x_i, x)$
   $\leq C + \delta + d(x_k, x_i) + d(x, Supp(\alpha))$
   $\leq C + \delta + R + d(x, Supp(\alpha))$

2. soit z_j est à une distance de $[x, x_i]$ inférieure à δ et il existe $u_j \in [x, x_i]$ tel que $d(z_j, u_j) \leq \delta$. On a alors :

   $d(x, Supp(\beta)) = d(x, \beta'_j)$
   $\leq d(\beta'_j, z_j) + d(z_j, u_j) + d(u_j, x)$
   $\leq C + \delta + d(x, x_i)$ car $u_j \in [x, x_i]$
   $\leq C + \delta + d(x, Supp(\alpha)) < C + \delta + R + d(x, Supp(\alpha))$□

Lemme 6.11. *Soient deux simplexes $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$ tels que $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C)$ avec $C > 0$. Désignons deux sommets $u \in Supp(\alpha)$ et $v \in Supp(\beta)$. Alors :*

$$d(v, geod(\{x, u\})) \leq C + \delta + R$$

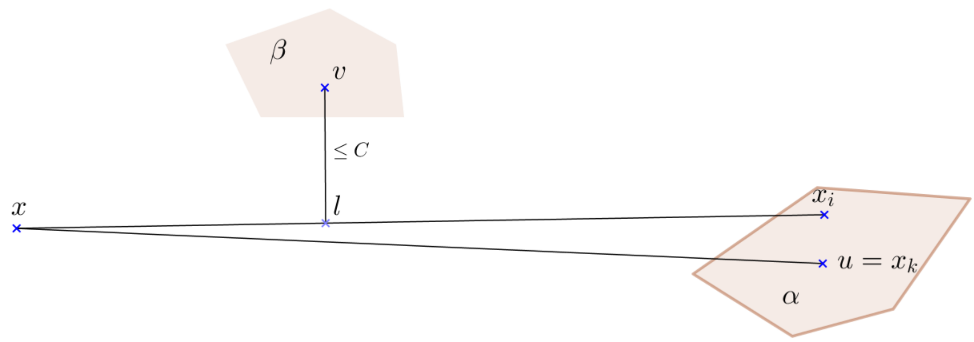

FIGURE 19

Preuve : Supposons que $\alpha = [x_0, ..., x_n]$ et soit $l \in geod(\{x_0, ..., x_n, x\})$ tel que $d(v, l) \leq C$.
Soit $k \in \{0, ..., n\}$ tel que $u = x_k$.
Désignons par $[x, x_k]$ une géodésique de x à x_k.
1er cas : si $l \in [x_i, x_j]$ avec $k \notin \{i, j\}$.
$d(v, [x, x_k]) \leq d(v, x_k) \leq d(v, l) + d(l, x_k)$ On s'intéresse au triangle formé par x_i, x_j et x_k. Alors :

1. soit l est à distance inférieure à δ de $[x_j, x_k]$ et :

$$d(v, [x, x_k]) \leq d(v, x_k) \leq d(v, l) + d(l, a) + d(a, x_{k)} \leq C + \delta + R$$

si $a \in [x_j, x_k]$ tel que $d(l, [x_j, x_k]) = d(l, a) \leq \delta$

2. soit l est à distance inférieure à δ de $[x_i, x_k]$ et :

$$d(v, [x, x_k]) \leq d(v, x_k) \leq d(v, l) + d(l, b) + d(b, x_k) \leq C + \delta + R$$

si $b \in [x_i, x_k]$ tel que $d(l, [x_i, x_k]) = d(l, b) \leq \delta$

2ème cas : si $l \in [x, x_i]$ avec $i \neq k$
On s'intéresse au triangle formé par x_i, x_k et x.

1. soit l est à distance inférieure à δ de $[x, x_k]$ et :

$$d(v, [x, x_k]) \leq d(v, b) \leq d(v, l) + d(l, b) \leq C + \delta$$

si $b \in [x, x_k]$ tel que $d(l, [x, x_k]) = d(l, b)$

2. soit l est à distance inférieure à δ de $[x_i, x_k]$ et :

$$d(v, [x, x_k]) \leq d(v, x_k) \leq d(v, l) + d(v, a) + d(a, x_k) \leq C + \delta + R$$

si $a \in [x_i, x_k]$ tel que $d(l, [x_i, x_k]) = d(l, a)$

On a donc montré que dans tous les cas :

$$d(v, geod(\{x, u\})) \leq C + \delta + R + 1\square$$

Proposition 6.12. ***Estimation des coefficients de matrice de l'opérateur elliptique.***
Il existe des constantes $C_{33}(\delta, \mid S \mid, R)$ et $C_{40}(\delta, \mid S \mid, R, n, t)$ telles que pour tous simplexes $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$:

1. $< F_{x,t}(\alpha), \beta >= 0$ *sauf éventuellement lorsque*
$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{33}(\delta, \mid S \mid, R))$$
2. $|< F_{x,t}(\alpha), \beta >| \leq$
$$C_{40} \cdot (\mid d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1) e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))}$$

Preuve :

$$< F_{x,t}(\alpha), \beta > =< e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x) e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >$$
$$= e^{-t\hat{d}(x,Supp(\alpha))} < e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \beta >$$

Or $(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha) = \sum_{\gamma \in \Delta_{n+1}(G)} < (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \gamma > \gamma$ donc :

$$e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha) = \sum_{\gamma \in \Delta_{n+1}(G)} < (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \gamma > e^{t\hat{d}_x}(\gamma)$$
$$= \sum_{\gamma \in \Delta_{n+1}(G)} < (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \gamma > e^{t\hat{d}(x,Supp(\gamma))}\gamma$$

Et :

$$< e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \beta >$$
$$= \sum_{\gamma \in \Delta_{n+1}(G)} < (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \gamma > e^{t\hat{d}(x, Supp(\gamma))} < \gamma, \beta >$$
$$= e^{t\hat{d}(x, Supp(\beta))} < (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \beta >$$

Finalement :

$$< F_{x,t}(\alpha), \beta > = e^{t(\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha)))} < (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \beta >$$

1ère étape : étude préliminaire de $< F_{x,t}(\alpha), \beta >$

On peut écrire $\partial \circ h^x(\alpha) = \sum_{\beta' \in \Delta_n^R(G)} < \partial \circ h^x(\alpha), \beta' > \beta'$ d'où :

$$< h_n^x \circ \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta >= \sum_{\beta' \in \Delta_n^R(G)} < \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta' > \cdot < h_n^x(\beta'), \beta >$$

Or, d'après le Théorème 5.29, nous savons que :

1. $< h_n^x(\beta'), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\beta') \cup \{x\}), C_{30})$
2. $< \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta' >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta') \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$

Donc $< h_n^x \circ \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), 2C_{30})$$

Par ailleurs, $Supp(\partial\alpha) \subset Supp(\alpha)$ donc $< \partial(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset Supp(\alpha) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), 2C_{30})$.
Finalement, $< F_{x,t}(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque :

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), 2C_{30} + R + \delta)$$

Inclusion que nous supposerons vérifiée par la suite.

2ème étape : D'après l'étape précédente, dans l'étude de la majoration des coefficients de matrice $< F_{x,t}(\alpha), \beta >$, il suffira de s'intéresser aux simplexes $\beta' \in \Delta_{n+1}^R$ vérifiant

1. $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\beta') \cup \{x\}), C_{30} + R + \delta)$ et
2. $Supp(\beta') \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30} + R + \delta)$

D'après le Lemme 6.10, si ces deux inclusions sont vérifiées alors :

1. $d(x, Supp(\beta)) \leq d(x, Supp(\beta')) + C_{30} + R + \delta$ et

2. $d(x, Supp(\beta')) \leq d(x, Supp(\alpha)) + C_{30} + R + \delta$

Il vient :

$$N_1 = d(x, Supp(\beta)) - C_{34} \leq d(x, Supp(\beta')) \leq d(x, Supp(\alpha)) + C_{34} = N_2$$

avec $C_{34}(\delta, \mid S \mid, R) = C_{30}(\delta, \mid S \mid, R) + R + \delta$.

d désigne ici la métrique des mots, les différentes distances sont donc à valeurs entières. $d(x, Supp(\beta'))$ ne peut donc prendre qu'au plus :

$$N_2 - N_1 + 1 = d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{34} + 1$$

valeurs possibles.

Notons $Z_{\alpha,\beta}$, l'ensemble des simplexes $\beta' = \left[\beta'_0, ..., \beta'_{n+1}\right]$ vérifiant les deux inclusions.

Soit $\beta' \in Z_{\alpha,\beta}$, il existe $i \in \{0, ..., n+1\}$ tel que

$$d(x, Supp(\beta')) = d(x, \beta'_i) = n_i$$

Supposons cette distance fixée.
Soit $y \in Supp(\alpha)$ tel que $d(x, Supp(\alpha)) = d(x, y)$ par exemple. D'après le Lemme 2.9 :

$$d(\beta'_i, geod(\{x, y\}) \leq C_{30} + \delta + R$$

car $Supp(\beta') \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$. Il existe donc une géodésique donnée $[x, y]$ de x à y et un point $z \in [x, y]$ tel que $d(\beta'_i, z) \leq C_{30} + \delta + R$. D'après la Proposition 2.10, si nous avions choisi n'importe quelle autre géodésique $[x, y]'$ de x à y et si nous avions noté $z' \in [x, y]'$ tel que $d(\beta'_i, z') = d(\beta'_i, [x, y]')$, nous aurions :

$$d(\beta'_i, [x, y]') \leq d(\beta'_i, [x, y]') + \delta \leq C_{30} + 2\delta + R$$

Il vient pour toute géodésique $[x, y]'$:

1. $d(x, z') \leq d(x, \beta'_i) + d(\beta'_i, z) \leq n_i + C_{30} + 2\delta + R$
2. $d(x, \beta'_i) \leq d(x, z') + d(z', \beta'_i) \leq$ donc

$$n_i \leq d(x, z') + C_{30} + 2\delta + R$$

On en déduit que :

$$n_i - (C_{30} + 2\delta + R) \leq d(x, z') \leq n_i + C_{30} + 2\delta + R$$

Donc $d(x,z')$ ne peut prendre qu'au plus $2(C_{30}(\delta, \mid S \mid, R) + 2\delta + R)$ valeurs possibles quelle que soit la géodésique $[x,y]$ choisie.
Il existe un nombre possible de z ne dépendant que de δ, de $\mid S \mid$ et de R pour une distance $d(x, Supp(\beta')) = d(x, \beta'_i) = n_i$ fixée (nombre inférieur ou égal au volume de la boule $B(x, 2(C_{30}(\delta, \mid S \mid, R) + 2\delta + R))$.
Puis pour z' donné, il existe un nombre fini de β'_i possibles car $d(\beta'_i, z) \leq C_{30} + 2\delta + R$. Notons ce nombre $C_{350}(\delta, \mid S \mid, R)$.

On sait que $card(\{g \in G, d(x,g) = n_i\}) \leq \mid S \mid^{n_i}$

Or β' est de diamètre R donc il y a au plus $\mid S \mid^{(n+1)R}$ choix pour les $n+1$ autres sommets (car $d(\beta'_i, \beta'_j) \leq R$ avec i fixé). Soit au total, au plus :

$$C_{35}(\delta, \mid S \mid, R) = C_{350}(\delta, \mid S \mid, R) \mid S \mid^{(n+1)R}$$

simplexes à une distance n_i de x pour une valeur donnée de d $d(x, Supp(\beta'))$
Au total, il existe donc au plus $C_{34}(\delta, \mid S \mid, R) = C_{35}(\delta, \mid S \mid, R) \cdot (d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{34} + 1)$ simplexes dans Z_α, β.

3ème étape : Montrons que :

$$\begin{gathered}|< h_n^x \circ \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta >| \\ \leq C_{36}(\delta, \mid S \mid, R, n) \cdot \mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 1 \mid\end{gathered}$$

D'après les deux premières étapes :

$$|< h_n^x \circ \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta >| \leq \sum_{\beta' \in Z_{\alpha,\beta}} |< \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta' >| \cdot |< h_n^x(\beta'), \beta >|$$

Or, d'après 5.29 :

$$|< h_n^x(\beta'), \beta >| \leq C_{31}(\delta, \mid S \mid, R) \text{ et}$$

$$|< \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta' >| \leq \sum_{i=0}^{n+1} |< \partial_i \circ h_n^x(\alpha), \beta' >| \leq (n+2) C_{31}(\delta, \mid S \mid, R)$$

D'où :

$$\begin{aligned}&|< h_n^x \circ \partial \circ h_n^x(\alpha), \beta >| \leq \mid Z_{\alpha,\beta} \mid (n+2) C_{31}^2(\delta, \mid S \mid, R) \\ &\leq C_{35} \cdot (d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{34} + 1)(n+2) C_{31}^2(\delta, \mid S \mid, R) \\ &\leq C_{36}(\delta, \mid S \mid, R, n) \cdot \mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 1 \mid\end{aligned}$$

en posant

$$C_{36}(\delta, \mid S \mid, R, n) = 2(n+2) C_{35}(\delta, \mid S \mid, R, n) C_{31}^2(\delta, \mid S \mid, R) C_{34}(\delta, \mid S \mid, R)$$

car :

$$(n+2)C_{31}^2C_{35} \leq 2(n+2)C_{31}^2C_{35}C_{34}$$

et

$$2(n+2)C_{31}^2C_{35}C_{34}$$
$$\leq 2(n+2)C_{31}^2C_{35}C_{34}\cdot \mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{34} + 1 \mid$$

4ème étape : Majoration de $\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha))$

Soient $u \in Supp(\alpha)$ et $v \in Supp(\beta)$ tels que $\hat{d}(x,u) = \hat{d}(x, Supp(\alpha))$ et $\hat{d}(x,v) = \hat{d}(x, Supp(\beta))$.
Or, d'après la 1ère étape, $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{33}(\delta, \mid S \mid, R)$.
Donc :

$$v \in B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{33}(\delta, \mid S \mid, R))$$

Majorons $d(v, geod(\{x,u\}) \cap G)$.

Étant donné que d est la métrique des mots, d'après le Lemme 6.11 :

$$d(v, geod(\{x,u\}) \cap G) \leq C_{33}(\delta, \mid S \mid, R) + \delta + R + 1 = C_{37}(\delta, \mid S \mid, R)$$

Soit donc $w \in geod(\{x,u\}) \cap G$ tel que : $d(v,w) \leq C_{37}(\delta, \mid S \mid, R)$
On a :

$\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha)) = \hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)$
$\leq \hat{d}(x,w) + \hat{d}(w,v) - \hat{d}(x,u)$
$\leq \hat{d}(x,w) - \hat{d}(x,u) + d(w,v) + C_1(\delta, \mid S \mid)$ d'après le Théorème 6.8 par quasi-isométrie de d et $\hat{d}$
$\leq -\hat{d}(u,w) + C_3(\delta, \mid S \mid) + C_{37}(\delta, \mid S \mid, R) + C_1(\delta, \mid S \mid)$ d'après le Théorème 6.8
$\leq -\hat{d}(u,w) + C_{38}(\delta, \mid S \mid, R)$ si

$$C_{38}(\delta, \mid S \mid, R) = C_3(\delta, \mid S \mid) + C_{37}(\delta, \mid S \mid, R) + C_1(\delta, \mid S \mid)$$

$\leq -\frac{1}{20\delta} d(u,w) + C_{38}(\delta, \mid S \mid, R)$ d'après 6.8 par quasi-isométrie de d et $\hat{d}$
$\leq \frac{d(x,w) - d(x,u)}{20\delta} + C_{38}(\delta, \mid S \mid, R)$ car $w \in geod(\{x,u\})$
$\leq \frac{d(x,v) + d(v,w) - d(x,u)}{20\delta} + C_{38}(\delta, \mid S \mid, R)$ par inégalité triangulaire

Par ailleurs :

1. $d(v,w) \leq C_{37}(\delta, \mid S \mid, R)$
2. $d(x, Supp(\alpha)) \leq d(x,u)$ car $u \in Supp(\alpha)$

3. Soit $v' \in Supp(\beta)$ tel que $d(x,v') = d(x, Supp(\beta))$, alors :

$$d(x,v) \leq d(x,v') + d(v',v) \leq d(x, Supp(\beta)) + R \text{ car } v, v' \in Supp(\beta)$$

Il vient :

$\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha))$
$\leq \frac{d(x,Supp(\beta))+R+C_{37}(\delta,|S|,R)-d(x,Supp(\alpha))}{20\delta} + C_{38}(\delta, \mid S \mid, R)$
$\leq \frac{d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha))}{20\delta} + C_{39}(\delta, \mid S \mid, R)$ avec

$$C_{39}(\delta, \mid S \mid, R) = \frac{R+C_{37}(\delta,|S|,R)}{20\delta} + C_{38}(\delta, \mid S \mid, R)$$

5ème étape : Rappelons que

$$|< F_{x,t}(\alpha), \beta >| = e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta))-\hat{d}(x,Supp(\alpha)))}. \ |< (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)(\alpha), \beta >|$$

D'où, d'après les étapes 3 et 4 :

$|< F_{x,t}(\alpha), \beta >|$
$\leq e^{t(\frac{d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha))}{20\delta}+C_{39})} \cdot C_{36} \cdot \mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 1 \mid$
$\leq C_{40} \cdot (\mid d(x, Supp(\beta) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1) e^{\dfrac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))}$

avec $C_{40}(\delta, \mid S \mid, R, n, t) = C_{36}(\delta, \mid S \mid, R, n) e^{tC_{39}(\delta,|S|,R)} \square$

Théorème 6.13. ***Estimation des coefficients de matrice des commutateurs clefs.***
Il existe des constantes $C_{46}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n, t)$ et $\lambda_5(\delta, \mid S \mid) < 1$ telles que pour tous simplexes $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$ et pour tout $t > 0$:

$|< (F_{x,t} - F_{x',t})(\alpha), \beta >| \leq$
$C_{46} \cdot \lambda_5^{d(x,Supp(\beta))} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha)))}.$
$(\mid d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1)^2$

Preuve :
1ère étape : Transformons l'écriture.
Remarquons que $F_{x,0} = \partial + h^x \circ \partial \circ h^x$ d'où :

$$F_{x,t} = e^{t\hat{d}_x} \circ (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x) \circ e^{-t\hat{d}_x} = e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x,0} \circ e^{-t\hat{d}_x}$$

Il vient :

$F_{x,t} - F_{x',t} = e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x,0} \circ e^{-t\hat{d}_x}$
$= e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x} + e^{t\hat{d}_x} \circ (F_{x',0} - F_{x,0}) \circ e^{-t\hat{d}_x}$

2ème étape : $|< (e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x})(\alpha), \beta >|$

De la même manière qu'au début de la preuve de la Proposition 6.12, on montre que :

$$< (e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}}(\alpha), \beta >= e^{t(\hat{d}(x',Supp(\beta))-\hat{d}(x',Supp(\alpha))} < F_{x',0}(\alpha), \beta >$$

Il vient :

$$|< (e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x})(\alpha), \beta >|$$
$$=| e^{t(\hat{d}(x',Supp(\beta))-\hat{d}(x',Supp(\alpha))} - e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta))-\hat{d}(x,Supp(\alpha))} | \cdot |< F_{x',0}(\alpha), \beta >|$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$| e^{t(\hat{d}(x',Supp(\beta))-\hat{d}(x',Supp(\alpha))} - e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta))-\hat{d}(x,Supp(\alpha))} |$$
$$\leq t \mid (\hat{d}(x', Supp(\beta)) - \hat{d}(x', Supp(\alpha)) - ((\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha))) \mid$$
$$\cdot \max_{y\in\{x,x'\}} e^{t(\hat{d}(y,Supp(\beta))-\hat{d}(y,Supp(\alpha))}$$

Majorons $\max_{y\in\{x,x'\}} e^{t(\hat{d}(y,Supp(\beta))-\hat{d}(y,Supp(\alpha))}$.

Si $y = x$: soient $u \in Supp(\beta)$ tel que $\hat{d}(x, Supp(\beta)) = \hat{d}(x, u)$, $u' \in Supp(\beta)$ tel que $\hat{d}(x', Supp(\beta)) = \hat{d}(x', u')$ et $v \in Supp(\alpha)$ tel que $\hat{d}(x, Supp(\beta)) = \hat{d}(x, u)$. On sait que :

1. $\hat{d}(x, u) \leq \hat{d}(x, x') + \hat{d}(x', u)$
2. $\hat{d}(x', v) \leq \hat{d}(x, x') + \hat{d}(x, v)$ d'où $-\hat{d}(x, v) \leq \hat{d}(x, x') - \hat{d}(x', v)$

Ainsi :

$$\hat{d}(y, Supp(\beta)) - \hat{d}(y, Supp(\alpha)) = \hat{d}(x, u) - \hat{d}(x, v)$$
$$\leq 2\hat{d}(x, x') + \hat{d}(x', u) - \hat{d}(x', v)$$

Or $\hat{d}(x', v) \geq \hat{d}(x', Supp(\alpha))$ donc $-\hat{d}(x', v) \leq -\hat{d}(x', Supp(\alpha))$ et :

$$\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha)) \leq 2\hat{d}(x, x') + \hat{d}(x', u) - \hat{d}(x', Supp(\alpha))$$
$$\leq 2\hat{d}(x, x') + \hat{d}(x', u') + \hat{d}(u', u) - \hat{d}(x', Supp(\alpha))$$
$$\leq \hat{d}(x', Supp(\beta)) - \hat{d}(x', Supp(\alpha)) + 2\hat{d}(x, x') + R + C_1$$
$$\leq \hat{d}(x', Supp(\beta)) - \hat{d}(x', Supp(\alpha)) + 2d(x, x') + 3C_1(\delta, \mid S \mid) + R \text{ d'après 6.8}$$

Si $y = x'$ **:** alors la majoration obtenue ci-dessus est triviale.

De la même manière, par symétrie :

$$\hat{d}(x', Supp(\beta)) - \hat{d}(x', Supp(\alpha))$$
$$\leq \hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha)) + 2d(x, x') + 3C_1(\delta, \mid S \mid) + R$$

Ainsi :

$\mid e^{t(\hat{d}(x',Supp(\beta))-\hat{d}(x',Supp(\alpha))} - e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta))-\hat{d}(x,Supp(\alpha))} \mid$
$\leq t \max_{u\in Supp(\alpha),v\in Supp(\beta)} \mid \hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\cdot e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta))-\hat{d}(x,Supp(\alpha))+4d(x,x')+6C_1(\delta,|S|)+2R)}$

D'après la 4 ème étape de la Proposition 6.12 :

$$\hat{d}(x, Supp(\beta)) - \hat{d}(x, Supp(\alpha))$$

$$\leq \frac{d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha))}{20\delta} + C_{39}(\delta, \mid S \mid, R)$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\mid e^{t(\hat{d}(x',Supp(\beta))-\hat{d}(x',Supp(\alpha))} - e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta))-\hat{d}(x,Supp(\alpha))} \mid \\ \leq C_{40} \cdot &\max_{u\in Supp(\alpha),v\in Supp(\beta)} \mid (\hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid \\ &\cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha))} \end{aligned}$$

avec $C_{40} = t \cdot e^{t(C_{39}(\delta,|S|,R))+4d(x,x')+6C_1(\delta,|S|)+2R))} = C_{40}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n, t)$

3ème étape : Majoration de $\mid \hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$

a) Première majoration

Désignons par $[x,x']$ une géodésique de x à x' et $[u,v]$ une géodésique de u à v. d étant la métrique des mots, nous aurons :

1. $[x,x'](0) = x$ et $[x,x'](d(x,x')) = x'$
2. pour tout $k \in \{1,...,d(x,x')-1\}$, $[x,x'](k) \in G$

de même pour $[u,v]$.
Pour un $k \in \{1,...,d(x,x')-1\}$ donné :

$$\sum_{l=1}^{d(u,v)} \hat{d}([x,x'](k),[u,v](l) - \hat{d}([x,x'](k),[u,v](l-1)$$

$-\hat{d}([x,x'](k-1),[u,v](l) + \hat{d}([x,x'](k-1),[u,v](l-1)$
$= -\hat{d}([x,x'](k),u) + \hat{d}([x,x'](k),v) - \hat{d}([x,x'](k-1),v) + \hat{d}([x,x'](k-1),u)$
$= -\hat{d}([x,x'](k),u) + \hat{d}([x,x'](k-1),u) + \hat{d}([x,x'](k),v) - \hat{d}([x,x'](k-1),v)$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} \hat{d}([x,x'](k),[u,v](l) - \hat{d}([x,x'](k),[u,v](l-1)$$

$-\hat{d}([x,x'](k-1),[u,v](l) + \hat{d}([x,x'](k-1),[u,v](l-1)$
$= \hat{d}(x,u) - \hat{d}(x',u) + \hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u)$

Ainsi :

$\mid (\hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\leq \sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} \mid \hat{d}([x,x'](k),[u,v](l) - \hat{d}([x,x'](k),[u,v](l-1) - \hat{d}([x,x'](k-1),[u,v](l) + \hat{d}([x,x'](k-1),[u,v](l-1) \mid$

Or $d([u,v](l),[u,v](l-1)) = d([x,x'](k),[x,x'](k-1)) = 1$, on peut donc appliquer le deuxième point de 6.8 :

$\mid (\hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\leq \sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} C_2(\delta, \mid S \mid) \lambda_2^{d([x,x'](k),[u,v](l))}$

Or $0 < \lambda_2 < 1$ et $d([x,x'](k),[u,v](l)) \geq d([x,x'],[u,v])$ donc :

$\mid (\hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\leq C_2(\delta, \mid S \mid) \sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} \lambda_2^{d([x,x'],[u,v])} = C_2(\delta, \mid S \mid) \cdot d(x,x') \cdot d(u,v) \cdot \lambda_2^{d([x,x'],[u,v])}$

b) Montrons que :

$$d(u,v) \leq C_{410} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)$$

Nous savons que $v \in Supp(\beta) \subset B(geod(\{x'\} \cup Supp(\alpha)), C_{33})$ donc il existe $\tilde{u} \in Supp(\alpha)$ et une géodésique $[x',\tilde{u}]$ tels que $d(v,[x',\tilde{u}]) \leq C_{33}$.
Soit $h \in [x',\tilde{u}]$ tel que $d(v,h) = d(v,[x',\tilde{u}]) \leq C_{33}$.
Soient $v' \in Supp(\beta)$ tel que $d(x', Supp(\beta)) = d(x',v')$ et $u' \in Supp(\alpha)$ tel que $d(x', Supp(\alpha)) = d(x',u')$.

$d(u,v) \leq d(u,h) + d(h,v) \leq d(u,\tilde{u}) + d(\tilde{u},h) + C_{33}$
$\leq R + C_{33} + (d(\tilde{u},x') - d(x',h))$ car $h \in [x',\tilde{u}]$
$\leq R + C_{33} + d(\tilde{u},u') + d(u',x') - d(x',h)$
$\leq 2R + C_{33} + d(u',x') - d(x',h)$

Or $d(x',v') \leq d(x',h) + d(h,v')$ d'où $-d(x',h) \leq -d(x',v') + d(h,v')$.
Il vient :

$d(u,v) \leq 2R + C_{33} + d(x', Supp(\alpha)) - d(x', Supp(\beta)) + d(h,v')$
$\leq 2R + C_{33} + d(x', Supp(\alpha)) - d(x', Supp(\beta)) + d(h,v) + d(v,v')$
$\leq 2R + C_{33} + d(x', Supp(\alpha)) - d(x', Supp(\beta)) + C_{33} + R$
$\leq 3R + 2C_{33} + d(x', Supp(\alpha)) - d(x', Supp(\beta))$
$\leq 3R + 2C_{33} + d(x,x') + R + d(x, Supp(\alpha)) - d(x', Supp(\beta))$

Or $d(x,v') \leq d(x,x') + d(x',v')$ donc :

$$-d(x',v') \leq d(x,x') - d(x,v') \leq d(x,x') - d(x, Supp(\beta))$$

Il vient :

$d(u,v) \leq 3R + 2C_{33} + d(x,x') + R + d(x, Supp(\alpha)) + d(x,x') - d(x, Supp(\beta))$
$\leq d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 4R + 2d(x,x') + 2C_{33}$
$\leq\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 1 \mid (1 + \frac{4R+2d(x,x')+2C_{33}}{|d(x,Supp(\alpha))-d(x,Supp(\beta))|+1})$
$\leq (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)(1 + 4R + 2d(x,x') + 2C_{33})$ car
$\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1 \geq 1$
$\leq C_{410} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1))$

avec $C_{410}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) = 1 + 4R + 2d(x,x') + 2C_{33}(\delta, \mid S \mid, R)$

c) Montrons que :

$$d([x,x'], [u,v]) \geq d(x, Supp(\beta)) - C_{411}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'))$$

Soient $y \in [x,x']$ et $w \in [u,v]$ sur deux géodésiques données tels que $d([x,x'], [u,v]) = d(y,w)$. Soit $h \in Supp(\alpha)$ tel que $d(x,h) = d(x, Supp(\alpha))$. Il vient de l'inégalité précédente :

$d(x, Supp(\beta)) \leq d(x,h) - d(u,v) + 4R + 2d(x,x') + 2C_{33}$
$\leq d(x,y) + d(y,w) + d(w,h) - d(u,v) + 4R + 2d(x,x') + 2C_{33}$

Or, $d(w,h) \leq d(w,u) + d(u,h) \leq d(u,v) + R$ donc $d(w,h) - d(u,v) \leq R$ et :

$d(x, Supp(\beta))$
$\leq d(x,y) + d([x,x'], [u,v]) + 5R + 2d(x,x') + 2C_{33}$
$\leq d(x,x') + d([x,x'], [u,v]) + 5R + 2d(x,x') + 2C_{33}$ car $y \in [x,x']$
$\leq d([x,x'], [u,v]) + 5R + 3d(x,x') + 2C_{33}$ car $y \in [x,x']$

On obtient la minoration recherchée en posant :

$$C_{411}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) = 5R + 3d(x,x') + 2C_{33}(\delta, \mid S \mid, R)$$

d) Conclusion : Nous savons que

$\mid (\hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\leq C_2(\delta, \mid S \mid) \cdot d(x,x') \cdot d(u,v) \cdot \lambda_2^{d([x,x'],[u,v])}$

et que :

1. $d(u,v) \leq C_{410}(\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)$

2. $d([x,x'],[u,v]) \geq d(x, Supp(\beta)) - C_{411}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'))$

Donc :
$\mid \hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\leq C_2(\delta, \mid S \mid) \cdot d(x,x') \cdot C_{410} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)) \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)) - C_{410}(\delta,|S|,R,d(x,x'))}$
$\leq C_{41} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)) \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)))}$

Avec

$C_{41}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) =$
$C_2(\delta, \mid S \mid) \cdot C_{410}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) \cdot \lambda_2^{-C_{411}(\delta,|S|,R,d(x,x'))}$

4ème étape :

$|< (e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x})(\alpha), \beta >|$
$\leq C_{40} \cdot \max_{u \in Supp(\alpha), v \in Supp(\beta)} \mid (\hat{d}(x',v) - \hat{d}(x',u) - ((\hat{d}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \mid$
$\cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))}.$ $|< F_{x',0}(\alpha), \beta >|$ d'après la 2ème étape
$\leq C_{40} \cdot C_{41} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)) \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)))} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))}.$
$C_{40} \cdot (\mid d(x', Supp(\beta) - d(x', Supp(\alpha)) \mid +1)$ d'après 6.12
$\leq C_{40}^2 \cdot C_{41} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1)) \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)))} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))}.$
$(\mid d(x', Supp(\beta) - d(x', Supp(\alpha)) \mid +1)$

Par un raisonnement identique à la 2ème étape, on montre que :

$\mid d(x', Supp(\beta) - d(x', Supp(\alpha)) \mid +1$
$\leq 2d(x,x') + R + \mid d(x, Supp(\beta) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1$
$\leq (\mid d(x, Supp(\beta) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1)(1 + \frac{2d(x,x')+R}{|d(x,Supp(\beta) - d(x,Supp(\alpha))|+1})$
$\leq C_{420}(\mid d(x, Supp(\beta) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1)$

Avec $C_{420}(R, d(x,x')) = 1 + 2d(x,x') + R$.

Finalement :

$|< (e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x})(\alpha), \beta >|$
$\leq C_{40}^2 \cdot C_{41} \cdot C_{420} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid$
$+1))^2 \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)))} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))}$
$\leq C_{42} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid$
$+1))^2 \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)))} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))}$

Avec $C_{42}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) = C_{420}(R, d(x,x')) \cdot C_{41}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) \cdot C_{40}^2(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n, t)$.

5ème étape : majoration de $<| e^{t\hat{d}_x} \circ (F_{x',0} - F_{x,0}) \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$
Par définition (Cf. Définition 6.9) :

$F_{x',0} - F_{x,0} = (\partial + h^{x'} \circ \partial \circ h^{x'}) - (\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)$
$= h^{x'} \circ \partial \circ h^{x'} - h^x \circ \partial \circ h^x$
$= (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'} + h^x \circ \partial \circ h^{x'} - h^x \circ \partial \circ h^x$
$= (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'} + h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x)$

a) Majoration de $|< (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta >|$

Posons $\partial \circ h^{x'}(\alpha) = \sum_{\beta' \in \Delta_{n+1}^R} < \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta' > \beta'$. Alors :

$$(h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'}(\alpha) = \sum_{\beta' \in \Delta_{n+1}^R} < \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta' > (h^{x'} - h^x)(\beta')$$

D'après le deuxième point du Théorème 5.29 $< h_n^x(\alpha), \beta >= 0$ sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(geod((Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$.
Notons $Z'_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des simplexes $\beta' \in \Delta_{n+1}^R$ tels que :

1. $Supp(\beta') \subset B(geod((Supp(\alpha) \cup \{x, x'\}), C_{30})$
2. $Supp(\beta) \subset B(geod((Supp(\beta') \cup \{x, x'\}), C_{30})$

Le même raisonnement que dans la deuxième étape de la Proposition 6.12 montre qu'il existe une constante $C_{43}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n)$ telle que :

$$| Z'_{\alpha,\beta} | \leq C_{43} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) | +1)$$

Il vient :

$|< (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta >|$
$\leq \sum_{\beta' \in Z'_{\alpha,\beta}} |< \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta' >| \cdot |< (h^{x'} - h^x)(\beta'), \beta >|$

$\leq \sum_{\beta' \in Z'_{\alpha,\beta}} (n + 2)C_{31} \cdot C_{32}\lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$ d'après 5.29

$\leq C_{43} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) | +1) \cdot (n + 2)C_{31} \cdot C_{32}\lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$
$\leq C_{44} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) | +1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$

avec :

$C_{44}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n) =$
$(n + 2)C_{43}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n) \cdot C_{31}(\delta, | S |, R) \cdot C_{32}(\delta, | S |, R, d(x, x'))$

b) Majoration de $|< h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >|$

Posons $(h^{x'} - h^x)(\alpha) = \sum_{\beta' \in Z'_{\alpha,\beta}} < (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta' > \beta'$ alors :

$$|< h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >|$$
$$\leq \sum_{\beta' \in Z'_{\alpha,\beta}} |< (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta' >| \cdot |< h^x \circ \partial(\beta'), \beta >|$$

$$\leq \sum_{\beta' \in Z'_{\alpha,\beta}} C_{32} \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta'))} \cdot (n+2)C_{31} \text{ d'après le Théorème 5.29}$$

$$\leq (n+2)C_{31} \cdot C_{32} \cdot C_{43} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) | +1) \cdot \lambda^{d(x,Supp(\beta'))}$$

Or $\beta' \in Z'_{\alpha,\beta}$ donc :
$Supp(\beta) \subset$
$B(geod(Supp(\beta') \cup \{x, x'\}), C_{30}) = B(geod((Supp(\beta') \cup \{x'\}) \cup \{x\}), C_{30})$

D'après le Lemme 6.11, on a donc :

$d(x, Supp(\beta)) \leq d(x, (Supp(\beta') \cup \{x'\})) + C_{30} + R + \delta$
$\leq d(x, (Supp(\beta')) + C_{30} + R + \delta$

et :
$d(x, Supp(\beta)) - C_{30} - R - \delta \leq d(x, (Supp(\beta'))$
Il vient :

$|< h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >|$
$\leq (n+2)C_{31} \cdot C_{32} \cdot C_{43} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) |$
$+1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))-C_{30}-R-\delta}$
$\leq C_{45} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) | +1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$

Avec :
$C_{45}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n) =$
$(n+2)C_{43}(\delta, | S |, R, d(x, x'), n) \cdot C_{31}(\delta, | S |, R) \cdot C_{32}(\delta, | S |, R, d(x, x'))\lambda_4(\delta, |$
$S |)^{-C_{30}-R-\delta}$

c) Conclusion

$|< e^{t\hat{d}_x} \circ (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'} \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$
$= e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta)-\hat{d}(x,Supp(\alpha))}\cdot |< (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta >|$
$\leq e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))+tC_{39}}\cdot |< (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'}(\alpha), \beta >|$ d'après la 4ème étape de la Proposition 6.12
$\leq e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))+tC_{39}} \cdot C_{44} \cdot (| d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) |$
$+1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$ d'après b) ci-dessus

De même :

$$|< e^{t\hat{d}_x} \circ h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x) \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$$
$$= e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta)-\hat{d}(x,Supp(\alpha))}\cdot\ |< h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >|$$
$$\leq e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))+tC_{39}}\cdot\ |< h^x \circ \partial \circ (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >|$$
$$\leq e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))+tC_{39}} \cdot C_{45} \cdot (\mid d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) \mid$$
$$+1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$$

Finalement :

$$|< e^{t\hat{d}_x} \circ (F_{x',0} - F_{x,0}) \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$$
$$\leq (C_{44} + C_{45})e^{tC_{39}} e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))} \cdot (\mid$$
$$d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$$

6ème Etape : Conclusion

$$|< (F_{x',t} - F_{x,t})(\alpha), \beta >|$$
$$\leq |< (e^{t\hat{d}_{x'}} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_{x'}} - e^{t\hat{d}_x} \circ F_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x})(\alpha), \beta >|$$
$$+ |< e^{t\hat{d}_x} \circ (h^{x'} - h^x) \circ \partial \circ h^{x'} \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$$
$$\leq C_{42} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1))^2 \cdot \lambda_2^{d(x,Supp(\beta)))}$$
$$\cdot e^{t(d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha))} + (C_{44} + C_{45})e^{tC_{39}} e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))}$$
$$\cdot(\mid d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) \mid +1) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$$
$$\leq C_{46} \cdot (\mid d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \mid +1))^2$$
$$\cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))} \cdot \lambda_5^{d(x,Supp(\beta))}$$

Avec
$\lambda_5(\delta, \mid S) = max(\lambda_2(\delta, \mid S), \lambda_4(\delta, \mid S)) < 1$ et :

$$C_{46}(\delta, \mid S \mid, R, d(x, x'), n)$$
$$= (C_{44}(\delta, \mid S \mid, R, d(x, x'), n) + C_{45}(\delta, \mid S \mid, R, d(x, x'), n))e^{tC_{39}(\delta,|S|,R)}\square$$

6.3 Construction du module de Fredholm

6.3.1 L'espace de Hilbert

Soit $\mathscr{H}_* = \ell^2(\Delta_*^R(G))$, l'espace de Hilbert des fonctions carré-intégrables sur le complexe de Rips. Il est gradué par le dégré des simplexes et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué par la parité des degrés de simplexes.
Soit l'opérateur d'antisymétrisation π_{as} défini dans le Lemme 5.23. On définit un nouvel espace :

$$\mathscr{H}^{as} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi_{as}(\ell^2(\Delta_n^R(G)))$$

Le groupe symétrique Σ_{n+1} agit par permutation des sommets sur $\Delta_n^R(G)$. Cette action entraîne une représentation unitaire de Σ_{n+1} sur $\mathscr{H}_n$. L'opérateur π_{as} définit alors une projection orthogonale de $\mathscr{H}_n$ sur sa partie anti-symétrique.
$\mathscr{H}^{as}$ est invariant sous la représentation régulière de G comme l'action de G sur les simplexes commute avec l'action du groupe symétrique.
$\mathscr{H}^{as}$ est donc une somme Hilbertienne directe et orthogonale.
Il est à noter que $\mathscr{H}_n^{as} = 0$ pour $n >> 0$. En effet, pour n assez grand, le diamètre R étant fixé, il y aura répétition d'au moins un sommet dans le simplexe.

Remarque 6.14. *Il convient de rester vigilant sur la caractère borné des opérateurs. Par exemple, en degré 0, le projecteur de rang 1*

$$p_{x_0} : [y] \mapsto [x_0]$$

n'est pas borné sur $\ell^2(G)$. En effet , soit $\xi = \sum\limits_{g \in G} a_g g$ alors :

$$\left\|p_{x_0}(\xi)\right\| = \left\|\sum_{g \in G} a_g p_{x_0}(g)\right\| = \left\|(\sum_{g \in G} a_g)\,[x_0]\right\| = |\,(\sum_{g \in G} a_g)\,|$$

Choisissons par exemple $\xi = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} g_n$. Alors on a bien $\xi \in \ell^2(G)$ car

$$\|\xi\|_{\ell^2(G)} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}}$$

mais

$$\left\|p_{x_0}(\xi)\right\| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ qui diverge}$$

En revanche, $e^{td_{x_0}} \circ p_{x_0} \circ e^{-td_{x_0}}$ est bornée pour t suffisamment grand. En effet :

$$\left\|e^{td_{x_0}} \circ p_{x_0} \circ e^{-td_{x_0}}(\sum_{g \in G} a_g g)\right\| = \left\|\sum_{g \in G} a_g e^{td_{x_0}} \circ p_{x_0} \circ e^{-td_{x_0}}(g)\right\|$$
$$= \left\|\sum_{g \in G} a_g e^{-td(x_0,g)} e^{td_{x_0}} \circ p_{x_0}(g)\right\| = \left\|\sum_{g \in G} a_g e^{-td(x_0,g)} e^{td_{x_0}}([x_0])\right\|$$

$= \left\| \sum_{g\in G} a_g e^{-td(x_0,g)}([x_0]) \right\| = \mid \sum_{g\in G} a_g e^{-td(x_0,g)} \mid$

$\leq \sqrt{\sum_{g\in G} a_g^2} \times \sqrt{\sum_{g\in G} e^{-2td(x_0,g)}}$ *par l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

Rappelons que $card(g \in G, d(x_0, g) \leq r) \leq (\mid S \mid +1)^r$. *Donc :*

$\sum_{g\in G} e^{-2td(x_0,g)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{|g|=r} e^{-2tr} \leq \sum_{r=0}^{\infty} (\mid S \mid +1)^r e^{-2tr}$

$\leq \sum_{r=0}^{\infty} [(\mid S \mid +1)e^{-2t}]^r$

qui converge lorsque $(\mid S \mid +1)e^{-2t} < 1$, *c'est à dire* $t > \frac{ln(|S|+1)}{2}$.

6.3.2 Prolongement des opérateurs densément définis à l'espace de Hilbert

Lemme 6.15. *Soient* X *et* Y *des ensembles dénombrables et soit une matrice* $(a_{y,x})_{x\in X, y\in Y}$ *à coefficients complexes telle que :*

1. *il existe* $C > 0$ *tel que pour tous* $x \in X, y \in Y$, $\mid a_{y,x} \mid \leq C$
2. *il existe* $C' > 0$ *tel que pour tout* $x \in X$: $card(\{y \in Y, a_{y,x} \neq 0\}) \leq C'$
3. *il existe* $C'' > 0$ *tel que pour tout* $y \in Y$: $card(\{x \in X, a_{y,x} \neq 0\}) \leq C''$

Alors l'application linéaire $T : \mathbb{C}X \to \mathbb{C}Y$ *telle que* $T(e_x) = \sum_{y\in Y} a_{y,x} e_y$ *se prolonge en un opérateur linéaire borné* $\tilde{T} : \ell^2(X) \to \ell^2(Y)$ *de norme*

$$\left\| \tilde{T} \right\| \leq C \cdot \sqrt{C' \cdot C''}$$

Preuve : Soient ξ et $\eta \in \mathbb{C}X$, des combinaisons linéaires finies, alors :

$|< T(\xi), \eta >| = |< \sum_{x\in X} \sum_{y\in Y} \xi_x \cdot a_{y,x} e_y, \sum_{y'\in Y} \eta_{y'} e_{y'} >|$

$= | \sum_{x\in X} \sum_{y\in Y} \sum_{y'\in Y} \xi_x \cdot a_{y,x} \cdot \overline{\eta_{y'}} < e_y, e_{y'} >|$

$= | \sum_{x\in X} \sum_{y\in Y} \xi_x \cdot a_{y,x} \cdot \overline{\eta_y} \mid$ car la base est orthonormale.

$\leq \sum_{x\in X, y\in Y} \mid \xi_x \mid \cdot \sqrt{\mid a_{y,x} \mid} \cdot \sqrt{\mid a_{y,x} \mid} \cdot \mid \eta_y \mid$

$\leq \sqrt{\sum_{x\in X, y\in Y} \mid \xi_x \mid^2 \cdot \mid a_{y,x} \mid} \cdot \sqrt{\sum_{x\in X, y\in Y} \mid \eta_y \mid^2 \cdot \mid a_{y,x} \mid}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$\leq \sqrt{C \cdot C'} \cdot \sqrt{\sum_{x\in X} \mid \xi_x \mid^2} \cdot \sqrt{C \cdot C''} \cdot \sqrt{\sum_{y'\in Y} \mid \eta_{y'} \mid^2}$

$\leq C \cdot \sqrt{C' \cdot C''} \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|$

Alors T s'étend à un opérateur borné $\tilde{T} : \ell^2(X) \to \ell^2(Y)$ de norme

$$\left\|\tilde{T}\right\| \leq C \cdot \sqrt{C' \cdot C''} \square$$

Définition 6.16. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $R > 0$, on note l'ensemble des $n-$ simplexes de diamètre R situés à une distance k de x par :*

$$\triangle_*^{R,x,k,n}(G) = \left\{\alpha \in \Delta_n^R(G), d(x, Supp(\alpha)) = k\right\}$$

Soit $V_{x,k,n}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\triangle_*^{R,x,k,n}(G)$ dans l'espace de Hilbert $l^2(\triangle_n^G)$.Alors les $V_{x,k,n}$ sont en somme directe hilbertienne (deux simplexes différents sont orthogonaux).
Nous noterons $P_{x,k,n} \in \mathscr{L}(l^2(\triangle_n^G))$ la projection orthogonale sur $V_{x,k,n}$.
Alors $Id = \sum_{k=0}^{\infty} P_{x,k}$ en topologie forte.

Proposition 6.17. $rg(P_{x,k,n}) \leq (n+1)\cdot \mid S \mid^{k+n(R+1)}$

Preuve : $rg(P_{x,k,n}) = dim(\triangle_*^{R,x,k,n}(G)) = card(\triangle_*^{R,x,k,n}(G))$

Soit $\alpha \in \triangle_*^{R,x,k,n}(G)$. Il y a $\mid S \mid^k$ choix possibles pour le sommet le plus proche de x avec $n+1$ positions possibles. Ce dernier étant fixé, il y a $\mid S \mid^{R+1}$ choix possibles pour chacun des autres sommets (car le diamètre de α est inférieur ou égal à R). D'où :

$$card(\triangle_*^{R,x,k,n}(G)) \leq (n+1)\cdot \mid S \mid^k \cdot (\mid S \mid^{(R+1)})^n = (n+1)\cdot \mid S \mid^{k+n(R+1)}$$

Lemme 6.18. *Soient deux simplexes $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$. Si*

$$Supp(\beta) \subset B(geod(\{x\} \cup Supp(\alpha)), C)$$

alors

$$Supp(\beta) \subset B(Supp(\alpha), d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C + 2R)$$

Preuve : Soient $\beta_j \in Supp(\beta)$ et $\alpha_j \in Supp(\alpha)$ tels que $d(x, Supp(\beta)) = d(x, \beta_j)$ et $d(x, Supp(\alpha)) = d(x, \alpha_j)$.
Soit $\beta_i \in Supp(\beta) \subset B(geod(\{x\} \cup Supp(\alpha)), C)$.

1er cas : il existe $\alpha_i \in Supp(\alpha)$ tel que $d(\beta_i, [x, \alpha_i]) \leq C$. Soit alors $h_i \in [x, \alpha_i]$ tel que $d(\beta_i, [x, \alpha_i]) = d(\beta_i, h_i) \leq C$.

$d(\beta_i, Supp(\alpha)) \leq d(\beta_i, \alpha_i) \leq d(\beta_i, h_i) + d(h_i, \alpha_i)$
$\leq C + d(x, \alpha_i) - d(x, h_i)$ car $h_i \in [x, \alpha_i]$
$\leq C + d(x, \alpha_j) + d(\alpha_j, \alpha_i) - d(x, h_i)$
$\leq C + d(x, Supp(\alpha)) + R - (d(x, \beta_j) - d(h_i, \beta_j))$ par inégalité triangulaire
$\leq C + d(x, Supp(\alpha)) + R - d(x, Supp(\beta)) + d(h_i, \beta_i) + d(\beta_i, \beta_j)$
$\leq d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C + 2R$

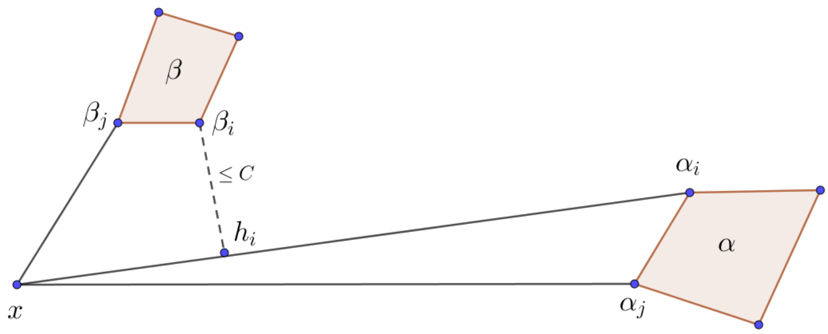

FIGURE 20 – Illustration du 1er cas

2ème cas : il existe $\alpha_k, \alpha_l \in Supp(\alpha)$ tel que $d(\beta_i, [\alpha_k, \alpha_l]) \leq C$.Soit alors $h_i \in [\alpha_k, \alpha_l]$ tel que $d(\beta_i, [\alpha_k, \alpha_l]) = d(\beta_i, h_i) \leq C$.

$d(\beta_i, Supp(\alpha)) \leq d(\beta_i, \alpha_k) \leq d(\beta_i, h_i) + d(h_i, \alpha_k) \leq C + R\square$

Théorème 6.19. *Pour tout $x \in G$, point de base, soit $t > t_0(\delta, |\ S\ |) = 20\delta ln(|\ S\ |)$ et $R \geq 4\delta$. L'application linéaire*

$$F_{x,t} : C_*^R(G, \mathbb{C}) \to C_{*\pm 1}^R(G, \mathbb{C})$$

définie en 6.9 se prolonge en un opérateur linéaire ***borné*** *entre espaces de Hilbert*

$$\tilde{F}_{x,t} : \mathscr{H}_*^{as} \to \mathscr{H}_{*\pm 1}^{as} \text{ où } \mathscr{H}_*^{as} = \pi_{as}(\ell^2(\Delta_*^R(G)))$$

Preuve : Il suffit de montrer que la restriction $F_{x,t,n}$ de $F_{x,t}$ à $C_n(\Delta^R(G))$ se prolonge en un opérateur linéaire borné sur $\mathscr{H}_n$ pour tout $n \geq 0$.
On a :

$F_{x,t,n} = Id_{\mathscr{H}_{n+1}} \circ F_{x,t,n} \circ Id_{\mathscr{H}_n}$
$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{x,k,n+1} \circ F_{x,t,n} \circ \sum\limits_{l=0}^{\infty} P_{x,l,n}$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{x,k,n+1} \circ F_{x,t,n} \circ \sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} P_{x,k+r,n}$

$= \sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} (\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{x,k,n+1} \circ F_{x,t,n} \circ P_{x,k+r,n})$

Soit $F_{x,t,r,k,n} = P_{x,k,n+1} \circ F_{x,t,n} \circ P_{x,k+r,n}$.
Pour $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$, on a

$< F_{x,t,r,k,n}(\alpha), \beta >$
$=< F_{x,t,n}(\alpha), \beta >$ si $d(x, Supp(\beta)) = k$ et si $d(x, Supp(\alpha)) = k + r$
$= 0$ sinon

Posons $F_{x,t,r,n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_{x,t,r,k,n}$. Les coefficients de matrice $< F_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >$ sont ceux de $F_{x,t,n}$ en ne conservant pour chaque $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$ que les coefficients $< F_{x,t,n}(\alpha), \beta >$ tels que $d(x, Supp(\alpha)) = d(x, Supp(\beta)) + r$.

Les coefficients de matrice de $\sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty} F_{x,t,r,n}$ sont alors tous ceux de $F_{x,t}$ car tous les $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$ sont considérés et pour chaque β, tous les $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ sont pris en compte.

$< F_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >= \sum\limits_{k=0}^{\infty} < P_{x,k,n+1} \circ F_{x,t} \circ P_{x,k+r,n}(\alpha), \beta >$
Or $P_{x,k+r,n}(\alpha) = 0$ sauf éventuellement lorsque $d(x, Supp(\alpha)) = k + r$ c'est-à-dire lorsque $k = d(x, Supp(\alpha)) - r$.
Il vient alors : $< F_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >=< P_{x,d(x,Supp(\alpha))-r,n+1} \circ F_{x,t}(\alpha), \beta >$
Or, d'après la Proposition 6.12 et le Lemme 6.18 :

$$F_{x,t}(\alpha) = \sum_{\gamma \in \Delta_{n\pm1}(G), Supp(\gamma) \subset B} < F_{x,t}(\alpha), \gamma > \gamma$$

avec :

$$B = B(Supp(\alpha), d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{33} + 2R)$$

D'où : $< F_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >= \sum\limits_{\gamma \in B} < F_{x,t}(\alpha), \gamma >< P_{x,d(x,Supp(\alpha))-r,n+1}(\gamma), \beta >$.

Or $< P_{x,d(x,Supp(\alpha))-r,n+1}(\gamma), \beta >= 0$ sauf lorsque $\gamma = \beta$ et

$$d(x,\beta)=d(x,Supp(\alpha))-r$$

et alors :

$$< F_{x,t,r,n}(\alpha),\beta >=< F_{x,t}(\alpha),\beta >= a_{\beta,\alpha}$$

Finalement $a_{\beta,\alpha}=0$ sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta)\subset B(Supp(\alpha),r+2C_{33}+2R)$$

D'après le Lemme 5.27, on a alors :

$$Supp(\alpha)\subset B(Supp(\beta),r+2C_{33}+3R)$$

Ainsi :

1. $card(\{\beta,a_{\beta,\alpha}\neq 0\})\leq Vol(B(Supp(\alpha),r+2C_{33}+2R))$
2. $card(\{\alpha,a_{\beta,\alpha}\neq 0\})\leq Vol(B(Supp(\beta),r+2C_{33}+3R))$

On notera qu'en particulier, $F_{x,t,r,n}=0$ lorsque $r<-2C_{33}(\delta,\mid S\mid,R)-2R$. Lorsque $F_{x,t,r,n}\neq 0$, on a d'après la Proposition 6.12 :

$$\begin{aligned}&\mid a_{\beta,\alpha}\mid\\ &\leq C_{40}\cdot(\mid d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha))\mid +1)\cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha)))}\\ &\leq C_{40}\cdot(\mid r\mid +1)\cdot e^{\frac{-t}{20\delta}r}\end{aligned}$$

D'après le Lemme 6.15, $F_{x,t,r,n}$ admet un prolongement $\tilde{F}_{x,t,r,n}\in\mathscr{L}(l^2(\triangle_n(G))$ tel que :

$$\begin{aligned}&\left\|\tilde{F}_{x,t,r,n}\right\|\\ &\leq C_{40}\cdot(\mid r\mid +1)\cdot e^{\frac{-t}{20\delta}r}\cdot\\ &\sqrt{Vol(B(Supp(\alpha),r+2C_{33}+2R))\cdot Vol(B(Supp(\beta),r+2C_{33}+3R))}\end{aligned}$$

Or :

1. $Vol(B(Supp(\alpha),r+2C_{33}+2R))\leq(n+1)\mid S\mid^{r+2C_{33}+2R}\cdot(\mid S\mid^R)^{n+1}$
2. $Vol(B(Supp(\beta),r+2C_{33}+3R))\leq(n+2)\mid S\mid^{r+2C_{33}+3R}\cdot(\mid S\mid^R)^{n}$

Donc :

$$\begin{aligned}&\left\|\tilde{F}_{x,t,r,n}\right\|\\ &\leq C_{47}\cdot(\mid r\mid +1)\cdot(\mid S\mid\cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^r \text{ pour } r\geq -2C_{33}(\delta,\mid S\mid,R)-2R\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}&C_{47}(\delta,\mid S\mid,R,n,t)=\\ &C_{40}(\delta,\mid S\mid,R,n,t)\cdot\sqrt{(n+1)(n+2)}\cdot\mid S\mid^{2C_{33}(\delta,|S|,R)+R(3+n)}\end{aligned}$$

Ainsi $F_{x,t,n}$ est également prolongeable sur $l^2(\triangle_n(G))$ en un opérateur linéaire **borné** avec :

$$\left\|\tilde{F}_{x,t,n}\right\| = \left\|\sum_{r\geq -2C_{33}-2R} \tilde{F}_{x,t,r,n}\right\| \leq \sum_{r\geq -2C_{33}-2R} \left\|\tilde{F}_{x,t,r,n}\right\|$$
$$\leq C_{47}(\delta, \mid S \mid, R, n, t) \cdot \sum_{r\geq -2C_{33}-2R} (\mid r \mid +1) \cdot (\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^r < \infty$$

si $\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}} < 1$ c'est-à-dire si $t > 20\delta ln(\mid S \mid)$.

$F_{x,t} = \sum_{n=0}^{C_{24}(|S|,R)} F_{x,t,n}$ est donc également prolongeable en un opérateur linéaire **borné** comme somme finie d'opérateurs prolongeables en un opérateur linéaire borné.$\square$

6.4 Appartenance des commutateurs $[F_{x,t}, \pi(g)]$ à la classe de Schatten

Nos opérateurs sont définis sur un espace de Hilbert. Par ailleurs, nous avons obtenu des majorations des coefficients de matrices. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la $p-$sommabilité du pré-module de Fredholm construit, pour p qui sera explicitement défini.

Lemme 6.20. *Soient $g, x \in G$, alors :*

1. $\pi(g) \circ e^{t\hat{d}_x} \circ \pi(g^{-1}) = e^{t\hat{d}_{gx}}$
2. $\pi(g) \circ \partial \circ \pi(g^{-1}) = \partial$
3. $\pi(g) \circ h^x \circ \pi(g^{-1}) = h^{gx}$

Preuve : Soient un simplexe $s \in \triangle_*(G)$ et ξ_s son vecteur de base correspondant dans $\ell^2(\triangle_*(G))$. Alors :

1. $\pi(g) \circ e^{t\hat{d}_x} \circ \pi(g^{-1})(\xi_s) = \pi(g) \circ e^{t\hat{d}_x}(\xi_{g^{-1}s}) = \pi(g)(e^{t\hat{d}(x,Supp(g^{-1}s))}\xi_{g^{-1}s})$
   $= e^{t\hat{d}(x,Supp(g^{-1}s))}\xi_s$
   $= e^{t\hat{d}(gx,Supp(s))}\xi_s$ par $G-$ équivariance de la distance $\hat{d}_x$ (Cf. 6.8)
2. Si $s = [x_0, ..., x_n] \in \triangle_n(G)$ et si $\tilde{s_i} = [x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n] \in \triangle_{n-1}(G)$ alors :
   $\pi(g) \circ \partial \circ \pi(g^{-1})(\xi_s) = \pi(g) \circ \partial(\xi_{g^{-1}s})$
   $= \pi(g)(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \xi_{(g^{-1}s)_i}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \xi_{\tilde{s_i}}$
   $= \partial(\xi_s)$

3. D'après le Théorème 5.29, par compatibilité des opérateurs $(h^x)_{x\in G}$ avec l'action du groupe, on sait que :

$$h^x \circ \pi(g^{-1}) = h^{g^{-1}(gx)} \circ \pi(g^{-1}) = \pi(g^{-1}) \circ h^{gx}$$

D'où :

$$\pi(g) \circ h^x \circ \pi(g^{-1}) = \pi(g) \circ \pi(g^{-1}) \circ h^{gx} = h^{gx}\square$$

Proposition 6.21. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *quels que soient $g, x \in G$, le commutateur $[F_{x,t}, \pi(g)]$ est compact et appartient à la classe de Schatten $\ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1})$*
2. *quels que soient $x, x' \in G$, $F_{x,t} - F_{x',t}$ est compact et appartient à la classe de Schatten $\ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1})$*

Preuve : $\ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1})$ étant un idéal bilatère :

$$\begin{aligned}[F_{x,t}, \pi(g)] \in \ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1}) &\Longleftrightarrow [F_{x,t}, \pi(g)]\, \pi(g^{-1}) \in \ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1}) \\ &\Longleftrightarrow F_{x,t} - \pi(g) \circ F_{x,t} \circ \pi(g^{-1})\end{aligned}$$

Or $F_{x,t} = e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)e^{-t\hat{d}_x}$ donc :

$\pi(g) \circ F_{x,t} \circ \pi(g^{-1}) = \pi(g) \circ e^{t\hat{d}_x}(\partial + h^x \circ \partial \circ h^x)e^{-t\hat{d}_x} \circ \pi(g^{-1})$
$= (\pi(g) \circ e^{t\hat{d}_x} \circ \pi(g^{-1}) \circ (\pi(g) \circ \partial \circ \pi(g^{-1}) + \pi(g) \circ h^x \circ \partial \circ h^x \circ \pi(g^{-1})) \circ$
$(\pi(g) \circ e^{-t\hat{d}_x} \circ \pi(g^{-1})$
$= (e^{t\hat{d}_{gx}}) \circ (\partial + \pi(g) \circ h^x \circ \partial \circ h^x \circ \pi(g^{-1})) \circ (e^{-t\hat{d}_{gx}}))$ d'après le Lemme 6.20
$= (e^{t\hat{d}_{gx}}) \circ (\partial + (\pi(g) \circ h^x \circ \pi(g^{-1})) \circ (\pi(g)\partial \circ \pi(g^{-1})) \circ (\pi(g) \circ h^x \circ \pi(g^{-1}))) \circ e^{-t\hat{d}_{gx}}$
$= e^{t\hat{d}_{gx}} \circ (\partial + h^{gx} \circ \partial \circ h^{gx}) \circ (e^{-t\hat{d}_{gx}})$
$= F_{gx,t}$

Pour conclure :

$$[F_{x,t}, \pi(g)] \in l^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1}) \Longleftrightarrow F_{x,t} - F_{gx,t} \in \ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1})\square$$

Théorème 6.22. *Soit $t > 20\delta \cdot ln(\mid S \mid)$, alors le commutateur $[F_{x,t}, \pi(g)]$ est compact et appartient à la classe de Schatten $\ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{n\pm 1})$ pour $p >> 0$.*

Preuve :
D'après la Proposition 6.21, $[F_{x,t}, \pi(g)]$ est compact et appartient à la classe de Schatten pour tout $g \in G$ si et seulement si $F_{x,x',t} = F_{x,t} - F_{x',t}$ est compact et appartient à la classe de Schatten $\ell^p(\mathscr{H}_n, \mathscr{H}_{\pm 1})$ pour tout $x' \in G$.
Intéressons nous aux opérateurs de rang fini :

$$F_{x,x',k,l,t,n} = P_{x,l,n} \circ (F_{x,t} - F_{x',t}) \circ P_{x,k,n}$$

avec $F_{x,x',k,l,t,n} : \ell^2(\triangle_n^R\ (G)) \to \ell^2(\triangle_{n\pm1}^R\ (G))$.
Alors :

$$F_{x,t} - F_{x',t} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} F_{x,x',k,l,t,n}$$

Comme dans la preuve du Lemme 6.18, on montre que si les $b_{\beta,\alpha}$ sont les coefficients de la matrice de $F_{x,x',k,l,t,n}$ pour $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n\pm1}^R(G)$ alors ses coefficients s'annulent sauf éventuellement lorsque :

$Supp(\beta) \subset B(Supp(\alpha), d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{33} + 2R + 2d(x,x'))$
$\Longleftrightarrow Supp(\beta) \subset B(Supp(\alpha), k - l + 2C_{33} + 2R + 2d(x,x')) =$
$B(Supp(\alpha), k - l + C_{48})$

si $C_{48}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x')) = 2C_{33}(\delta, \mid S \mid, R) + 2R + 2d(x,x')$.
On a alors :

$$Supp(\alpha) \subset B(Supp(\beta), k - l + C_{48} + R)$$

On notera en particulier que $F_{x,x',k,l,t,n} = 0$ lorsque $k - l + C_{48} < 0$, c'est-à-dire lorsque : $k < l - C_{48}$

1ère étape : Montrons que $F_{x,x',t} = F_{x,t} - F_{x',t}$ est compact.
Soit la fonction $\phi : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$ telle que $\phi(s) = \lambda_5^s$.
Alors $\lim_{x \to +\infty} \phi(s) = 0$ car $\lambda_5 \in [0; 1[$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $S > 0$ tel que pour tout $s > S$, on a $0 \leq \phi(s) \leq \varepsilon$.

$$F_{x,t,n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} P_{x,k,n+1} \circ F_{x,x',t,n} \circ P_{x,k+r,n}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_{x,x',t,r,n}$$

avec $F_{x,x',t,r,n} = P_{x,k,n+1} \circ F_{x,x',t,n} \circ P_{x,k+r,n}) = 0$ lorsque $r + C_{48} < 0$, c'est à dire lorsque : $r < -C_{48}$.
D'après la Proposition 6.13 :

$|< (F_{x,t} - F_{x',t})(\alpha), \beta >|$
$\leq (1 + \mid d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) \mid)^2 \cdot$
$C_{46} \cdot e^{\frac{t}{20\delta} \cdot (d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))} \cdot \phi(d(x, Supp(\beta)))$

Posons $\tilde{F}_{x,x',t,r,n} = \sum_{k=S}^{\infty} F_{x,x',t,r,n}$. On montre que, de même que dans la preuve de la Proposition 6.19, il existe une constante $D_{47}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n, t)$ telle que :

$\left\|\tilde{F}_{x,x',t,r,n}\right\|$
$\leq D_{47} \cdot (\mid r \mid +1)^2 \cdot (\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^r \cdot \varepsilon$
pour $r \geq -2C_{48}$ car on somme sur $k = d(x, Supp(\beta)) \geq S$ et $\phi(d(x, Supp(\beta))) = \phi(k) < \varepsilon$.

Il vient :

$$\left\|\tilde{F}_{x,x',t,r,n}\right\| \leq \varepsilon \cdot D_{47} \cdot \sum_{r=-C_{48}}^{\infty} (\mid r \mid +1)^2 (\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^r$$

Choisissons $t > 20\delta \cdot ln(\mid S \mid))$ alors $\sum\limits_{r=-C_{48}}^{\infty} (\mid r \mid +1)^2 \cdot (\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^r$ converge et a pour somme une constante $D_{48}(\delta, \mid S \mid, d(x, x'), t)$.
Ainsi :

$$\left\|\tilde{F}_{x,x',t,r,n}\right\| \leq \varepsilon \cdot D_{47}(\delta, \mid S \mid, R, n, t) \cdot D_{48}(\delta, \mid S \mid, d(x, x'), t)$$

Nous avons prouvé que si l'on choisit $\varepsilon < \frac{1}{D_{47} \cdot D_{48}}$ alors il existe $S \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left\| F_{x,x',t,r,n} - \sum_{k=0}^{S-1} F_{x,x',t,r,k,n} \right\| = \left\|\tilde{F}_{x,x',t,r,n}\right\| < \varepsilon$$

Or chaque $F_{x,x',t,r,k,n}$ est de rang fini (car les projecteurs orthogonaux sont de rang fini d'après la Proposition 6.17). L'inégalité ci-dessus nous montre que $F_{x,x',t,r,n}$ est limite en norme d'opérateurs bornés de rang fini, donc est compact.

$\tilde{F}_{x,x',t,n} = \sum\limits_{r=-C_{48}}^{\infty} F_{x,x',t,r,n}$ est donc limite normique d'opérateurs compacts. $F_{x,x',t,n}$ donc est compact (les opérateurs compacts forment un sous-espace vectoriel fermé de l'ensemble des opérateurs bornés).
Par ailleurs, $F_{x,x',t} = \sum\limits_{n=0}^{C_{24}(|S|,R)} F_{x,x',t,n}$ est compact comme somme finie d'opérateurs compacts.

2ème étape : Montrons que $F_{x,t} - F_{x',t}$ est p-sommable pour $p = 2N$.
Rappelons que pour $p = 2N$ et $A \in \ell^p(\mathscr{H})$, on a :

$$\|A\|_{\ell^{2N}(\mathscr{H})} = (Trace(AA^*)^N)^{\frac{1}{2N}}$$

D'où :

$$\|F_{x,x',k,l,t,n}\|_{\ell^p} = Trace((F_{x,x',k,l,t,n} \circ F^*_{x,x',k,l,t,n})^N)^{\frac{1}{2N}}$$

Intéressons nous à l'opérateur $F_{x,x',k,l,t,n} \circ F^*_{x,x',k,l,t,n}$ aux coefficients de matrice $c^1_{\beta',\beta}$.
Nous savons que

$$Mat(F^*_{x,x',k,l,t,n}) = {}^t\overline{Mat(F_{x,x',k,l,t,n})}$$

Si $(b^*_{\alpha,\beta})$ est la matrice de $F^*_{x,x',k,l,t,n}$, on a donc : $b^*_{\alpha,\beta} = \overline{b_{\beta,\alpha}}$.
Si $(p_{\beta',\beta})$ est la matrice de $F_{x,x',k,l,t,n} \circ F^*_{x,x',k,l,t,n}$, alors :

$$p_{\beta',\beta} = \sum_{\gamma \in \Delta^R_n} b_{\beta',\gamma} \cdot \overline{b_{\beta,\gamma}}$$

On montre par récurrence sur N que si $(c^N_{\beta',\beta})$ est la matrice de $(F_{x,x',k,l,t,n} \circ F^*_{x,x',k,l,t,n})^N$ alors :

$$c^N_{\beta',\beta} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \Delta^{R,x,k}_n, \beta_1,\ldots,\beta_N \in \Delta^{R,x,l}_{n+1}} b_{\beta',\alpha_1} \cdot \overline{b_{\beta_2,\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot b_{\beta_N,\alpha_N} \cdot \overline{b_{\beta,\alpha_N}}$$

Lorsque $k \geq l - C_{48}$, on sait d'après la Proposition 6.13 que :

$| b_{\beta,\alpha} |$
$\leq C_{46} \cdot \lambda_5^{d(x,Supp(\beta))} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha)))}$.
$(| d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha)) | +1)^2$
$\leq C_{46} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2$

D'où :

$| c^N_{\beta',\beta} |$
$$\leq \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \Delta^{R,x,k}_n, \beta_1,\ldots,\beta_N \in \Delta^{R,x,l}_{n+1}} | b_{\beta',\alpha_1} \cdot \overline{b_{\beta_2,\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot b_{\beta_N,\alpha_N} \cdot \overline{b_{\beta,\alpha_N}} |$$
$$\leq \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \Delta^{R,x,k}_n, \beta_1,\ldots,\beta_N \in \Delta^{R,x,l}_{n+1}} \left[C_{46} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2 \right]^{2N}$$

Dans cette somme, on ne comptabilisera que les b_{β_i,α_j} tels que :

1. $Supp(\alpha_j) \subset B(Supp(\beta_i), k-l+C_{48}+R)$
2. $Supp(\beta_i) \subset B(Supp(\alpha_j), k-l+C_{48}+R)$

Le nombre de termes est donc inférieur ou égal à :

$$\left[| S |^{k-l+C_{48}} \cdot | S |^{nR}\right]^N \cdot \left[| S |^{k-l+C_{48}} \cdot | S |^{(n+1)R}\right]^N$$

Et :

$$
\begin{aligned}
&| c^N_{\beta',\beta} | \\
&\leq \left[| S |^{(n+1)R+C_{48}}\right]^{2N} \cdot \left[| S |^{k-l}\right]^{2N} \cdot \left[C_{46} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2\right]^{2N} \\
&\leq \left[C_{49} \cdot | S |^{k-l} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2\right]^{2N}
\end{aligned}
$$

avec

$$C_{49}(\delta, | S |, R, n, t, d(x, x')) = C_{46}(\delta, | S |, R, n, t, d(x, x')) \cdot | S |^{(n+1)R+C_{48}}$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
&\|F_{x,x',k,l,t,n}\|^{2N}_{l^p} = Trace((F_{x,x',k,l,t,n} \circ F^*_{x,x',k,l,t,n})^N) \\
&\leq \sum_{\beta \in \Delta^{R,x,l,n}_{n+1}} | c^N_{\beta',\beta} | \\
&\leq rg(P_{x,l,n}) \left| \left[C_{49} \cdot | S |^{k-l} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2\right]^{2N} \right. \\
&\leq (n+2) | S |^{l+(n+1)(R+1)} \left[C_{49} \cdot | S |^{k-l} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2\right]^{2N}
\end{aligned}
$$

d'après la Proposition 6.17

Il vient :

$$
\begin{aligned}
&\|F_{x,x',k,l,t,n}\|_{l^p} \\
&\leq C_{50} | S |^{\frac{l}{2N}} \cdot | S |^{k-l} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k))} \cdot (| k-l | +1)^2
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
&C_{50}(\delta, | S |, R, n, t, d(x, x')) = \\
&C_{49}(\delta, | S |, R, n, t, d(x, x')) \cdot (n+2) \cdot | S |^{(n+1)(R+1)}
\end{aligned}
$$

Finalement :

$$
\begin{aligned}
&\|F_{x,t} - F_{x',t}\|_{l^p} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} F_{x,x',k,l,t,n} \right\|_{l^p} \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l-C_{48}}^{\infty} \|F_{x,x',k,l,t,n}\|_{l^p} \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l-C_{48}}^{\infty} C_{50} | S |^{\frac{l}{2N}} \cdot | S |^{k-l} \cdot \lambda_5^l \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k)} \cdot (| k-l | +1)^2 \\
&\leq C_{50} \sum_{l=0}^{\infty} (| S |^{\frac{1}{2N}} \cdot \lambda_5)^l \sum_{k=l-C_{48}}^{\infty} \cdot | S |^{k-l} \cdot e^{\frac{t}{20\delta}(l-k)} \cdot (| k-l | +1)^2 \\
&\leq C_{50} \sum_{l=0}^{\infty} (| S |^{\frac{1}{2N}} \cdot \lambda_5)^l \cdot \sum_{m=-C_{48}}^{\infty} (| S | \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^m \cdot (| m | +1)^2
\end{aligned}
$$

Or :

1. si $\mid S \mid^{\frac{1}{2N}} \cdot \lambda_5 < 1$, c'est-à-dire si $p = 2N > \frac{-ln(|S|}{ln(\lambda_5)}$ alors la première série converge
2. d'après le critère de d'Alembert, si $\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}} < 1$, c'est-à-dire si $t > 20\delta ln(\mid S \mid)$, alors la deuxième série converge $\square$

Remarque 6.23. *La preuve précédente nous fournit une expression explicite du degré p de sommabilité :*

$$p > \frac{-ln(|S|}{ln(\lambda_5)}$$

Rappelons que λ_5 est définie en 6.2 par :

$$\lambda_5(\delta, \mid S) = max(\lambda_2(\delta, \mid S), \lambda_4(\delta, \mid S)) < 1$$

où λ_2 (défini dans le Théorème 6.8) est relatif à la distance de Mineyev-Yu et λ_4 ,défini dans le Théorème 5.29, dépend de la constante λ_1 du bicombing de Mineyev-Yu défini dans la Proposition 5.14.
Une étude attentive des travaux de Mineyev-Yu permet de montrer que $[F_{x,t}, \pi(g)]$ est $p-$sommable pour :

$$p \geq 5000\delta^3 \cdot ln(\mid S \mid) \cdot (1+ \mid S \mid)^{14\delta}$$

Proposition 6.24. *$F_{x,t}^2 - 1$ est compact et appartient à la classe de Schatten $\ell^p(\mathscr{H}_n^{as}, \mathscr{H}_{\pm 1}^{as})$*

Preuve : Posons $k^x = h^x \circ \partial \circ h^x$ alors :

$k^x \circ k^x = h^x \circ \partial \circ h^x \circ h^x \circ \partial \circ h^x$
$= h^x \circ (\partial \circ h^x) \circ (h^x \circ \partial) \circ h^x$
$= h^x \circ (id - h^x \circ \partial) \circ (id - \partial \circ h^x) \circ h^x$
$= h^x \circ (id - \partial \circ h^x - h^x \circ \partial) \circ h^x$
$= h^x \circ (id - id) \circ h^x$
$= 0$

D'où :

$F_{x,t}^2 = e^{t\hat{d}_x}(\partial + k^x) \circ (\partial + k^x)e^{-t\hat{d}_x}$
$= e^{t\hat{d}_x}(\partial \circ k^x + k^x \circ \partial)e^{-t\hat{d}_x}$

En degrés strictement positifs : $\partial \circ h^x + h^x \circ \partial = 1$.

Par ailleurs :

$\partial \circ k^x + k^x \circ \partial$
$= \partial \circ h^x \circ \partial \circ h^x + h^x \circ \partial \circ h^x \circ \partial$
$= (id - h^x \circ \partial) \circ \partial \circ h^x + h^x \circ \partial \circ (id - \partial \circ h^x)$
$= \partial \circ h^x + h^x \circ \partial$
$= id$

Il vient :

$F_{x,t}^2 = e^{t\hat{d}_x}(\partial \circ k^x + k^x \circ \partial + k^x \circ k^x)e^{-t\hat{d}_x}$
$F_{x,t}^2 = e^{t\hat{d}_x}(id + 0)e^{-t\hat{d}_x} = id$

Tandis qu'en degré 0 :

$F_{x,t}^2([x_0] = e^{t\widehat{d_x}}(\partial k^x)e^{-t\widehat{d_x}}([x_0]) = e^{t\widehat{d_x}}(\partial h^x)^2 e^{-t\widehat{d_x}}([x_0])$

Or $\partial h^x([x_0]) = [x] - [x_0]$ donc $(\partial h^x)^2[x_0] = [x_0] - [x]$ et :

$$F_{x,t}^2([x_0]) = [x_0] - e^{-t\widehat{d}(x,x_0)}([x])$$

où $p_{x,t}$ est l'opérateur borné de rang 1 qui s'annule en degré strictement positif et qui est défini en degré 0 par :

$$p_{x,t}([x_0]) = e^{-t\widehat{d}(x,x_0)}[x_0] \text{ pour tout } x_0 \in G$$

Ainsi $F_{x,t}^2 - 1$ est de rang 1 et donc compact et appartient à toute classe de Schatten $\square$.

Remarque 6.25. *D'après le Théorème 6.22, le triplet* $(\mathscr{H}^{as}, \pi, F_{x,t}) \in E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *selon les critères de Kasparov.*

7 L'élément gamma

Nous allons maintenant montrer que notre triplet représente l'élément gamma de G. Kasparov.

7.1 L'élément gamma

Avant de définir l'élément gamma, revenons sur la définition du produit croisé d'une C^*−algèbre par un groupe discret G. La définition suivante provient de [Wi], Lemme 2.27 :

Définition 7.1. *Soient un groupe discret G et une C^*-algèbre A sur laquelle agit G. Notons :*

$$C_c(G,A) = \left\{ \sum_{t\in G} a_t u_t, card(\{t \in G, a_t \neq 0\}) < \infty) \right\}$$

On peut munir $C_c(G,A)$ de deux lois. Si $a = \sum_{t\in G} a_t u_t$ et $b = \sum_{s\in G} b_s u_s$ alors on pose :

1. $ab = \sum_{s,t\in G} a_t(t \cdot b_s)u_{ts}$

2. $a^* = \sum_{t\in G} (t^{-1} \cdot a_t^*)u_{t^{-1}}$

Une représentation covariante (π, u, H) de (A, G) est donnée par :
— *une représentation unitaire $u : G \to \mathscr{B}(H)$ de G*
— *une représentation $\pi : A \to \mathscr{B}(H)$ telles que pour tout $t \in G$ et tout $a \in A$:*

$$u(t)\pi(a)u(t)^* = \pi(t \cdot a)$$

Pour une représentation covariante (π, u, H) donnée, soit $\pi \times u$ la représentation associée de $C_c(G,A)$ sur $\mathscr{H}$.
La norme de C^*- algèbre maximale sur $C_c(G,A)$ est donnée par :

$$\|\cdot\| = sup\,\|(\pi \times u)(\cdot)\|$$

où le sup est pris sur toutes les représentations covariantes (π, u, H) de (A, G).
Le ***produit croisé****, noté $A \rtimes G$, est le complété de $C_c(G,A)$ relativement à la norme de C^*-algèbre maximale.*
La norme de C^*-algèbre réduite sur $C_c(G,A)$ est donnée par :

$$\|\cdot\|_\lambda = \|\tilde{\pi} \times \lambda(\cdot)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H})}$$

où la représentation régulière : $\tilde{\pi} \times \lambda : C_c(G,A) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est la représentation associée à la représentation covariante donnée par :

$$\tilde{\pi}\delta_{t,\xi} = \delta_{t,\pi(t^{-1}\cdot a)\xi} \text{ et } \lambda(s)\delta_{t,\xi} = \delta_{st,\xi},\ a \in A,\ s,t \in G,\ \text{et } \xi \in H$$

où $\pi : A \to \mathscr{B}(H)$ est une représentation fidèle, $\mathscr{H} = \ell^2(G,H)$ et $\delta_{t,\xi} \in \mathscr{H}$ est l'application $s \mapsto \delta_{t,s}\xi \in H$ ($\delta_{t,s}$ étant le symbole de Kronecker).
La norme de C^*- algèbre réduite ne dépend pas du choix de π.
Le ***produit croisé réduit****, noté $A \rtimes_r G$ est le complété de $C_c(G,A)$ relativement à cette norme.*

Soient G un groupe localement compact à base dénombrable, et soient A, B et C trois $G - C^*-$ algèbres. Alors Kasparov, dans [Ka] Définition 2.3, construit un groupe abélien noté $KK^G(A, B)$ de classes d'homotopie de bimodules équivariants.
Il existe un produit bilinéaire et associatif :

$$KK^G(A, B) \otimes KK^G(B, C) \to KK^G(A, C)$$

faisant de $KK^G(A, A)$ un anneau unitaire commutatif.
La $KK-$ théorie équivariante généralise la $K-$ théorie bivariante de Kasparov (qui correspond au cas $G = 1$).

Par ailleurs, à tout homomorphisme $H \to G$ de groupes localement compacts, on peut associer des transformations qui conservent toutes le produit de Kasparov :

— l'opération de **restriction** de Kasparov :
$$res_H^G : KK^G(A, B) \to KK^H(A, B)$$
— l'opération de **descente** de Kasparov :
$$j : KK^G(A, B) \to KK(A \rtimes G, B \rtimes G)$$
— l'opération de **descente réduite** de Kasparov :
$$j_r : KK^G(A, B) \to KK(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G)$$

On dit que $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est un **élément gamma** pour G lorsque :

1. il existe un module A, il existe $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que :

$$1 = d \otimes_{\mathbb{C}} \eta \text{ et } \gamma = \eta \otimes_A d$$

   où A est une $G - C^*$algèbre contenant une C^*-algèbre $B = C_0(Z)$ dans son centre avec Z un $G-$espace localement compact muni d'une $G-$action propre.

2. $res_H^G(\gamma) = 1 \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ pour tout sous-groupe compact $K \subset G$

Si Γ est un groupe discret et si A est une $\Gamma - C^*-$ algèbre alors il existe un isomorphisme canonique :

$$i : KK_\Gamma(A, \mathbb{C}) \simeq KK(A \rtimes \Gamma, \mathbb{C})$$

entre la $K-$homologie équivariante de A et la $K-$ homologie de la C^*-algèbre produit croisé maximal $A \rtimes \Gamma$.

Si Γ est un groupe discret et si A est une $\Gamma - C^*-$ algèbre propre alors les produits croisés maximaux et réduit coïncident et :

$$i_r : KK^\Gamma(A, \mathbb{C}) \simeq KK(A \rtimes_r \Gamma, \mathbb{C})$$

Si $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est un élément Gamma avec factorisation $\gamma = \eta \otimes_{\mathbb{C}} d$ avec $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ alors l'élément :

$$\gamma_r = j_r(\eta) \otimes_{A \rtimes_r \Gamma} i_r(d) \in KK(C_r^*\Gamma, \mathbb{C})$$

est appelé un **élément gamma réduit** de Γ.

V. Lafforgue ([Laf]), Proposition 4.5 , définit pour tout groupe hyperbolique (Γ, S), un module de Fredholm qui représente un élément Gamma par :

$$\varepsilon = (\mathscr{H}^{as}, \pi_{reg}, e^{td_x^{Laff}}(\partial + J_x \partial J_x)e^{-td_x^{Laff}})$$

où d_x^{Laff} est la distance à l'origine par rapport à une métrique quasi-isométrique à la métrique de mots et J_x est une homotopie contractante distinguée du complexe de Rips de (Γ, S).

Afin d'atteindre notre objectif, il nous faut créer une homotopie (ou un enchaînement d'homotopies) entre notre pré-module de Fredholm et celui de V. Lafforgue (lui-même homotope au triplet de Kasparov et Skandalis représentant l'élément gamma) afin de prouver que ces derniers sont équivalents, donc égaux dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

7.2 Quelques propriétés de la distance de V. Lafforgue

V. Lafforgue crée une distance $G-$équivariante que nous noterons d^{Laff} vérifiant :

$$d(x,y) \leq d^{Laff}(x,y) \leq d(x,y) + 7\delta$$

La preuve de cet encadrement se trouve dans sa Proposition 3.49 de [Laf].

Par conséquent :

$$\tfrac{1}{20\delta} d(x,y) \leq d(x,y) \leq d^{Laff}(x,y) \leq d(x,y) + 7\delta$$

Lemme 7.2. *Pour tous $x, y \in G$ et tout $z \in geod(\{x,y\})$:*

$$\mid d^{Laff}(x,z) + d^{Laff}(z,y) - d^{Laff}(x,y) \mid \leq 14\delta$$

Preuve :

$$d(x,z) + d(z,y) \leq d^{Laff}(x,z) + d^{Laff}(z,y) \leq d(x,z) + d(z,y) + 14\delta$$

Or $z \in geod(\{x,y\})$ donc $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$. Ainsi :

$$d(x,y) \leq d^{Laff}(x,z) + d^{Laff}(z,y) \leq d(x,y)) + 14\delta$$

Par ailleurs :

$$-d(x,y) - 7\delta \leq -d^{Laff}(x,y) \leq -d(x,y)$$

D'où :

$$-7\delta \leq d^{Laff}(x,z) + d^{Laff}(z,y) - d^{Laff}(x,y) \leq 14\delta\square$$

Lemme 7.3. *Il existe une constante $C_{10}(\delta, \mid S \mid)$ telle que pour tout $x, y \in G$:*

$$\sup_{d(x,x')=d(y,y')=1} \mid d^{Laff}(x,y) - d^{Laff}(x',y) - d^{Laff}(x,y') + d^{Laff}(x',y') \mid \leq \frac{C_{10}}{1+d(x,y)}$$

Preuve : Dans [Laf], on intègre l'inégalité obtenue dans le Lemme 3.45, puis, par définition de d^{Laff} (rappelée juste avant le Lemme 3.44 p.60), on obtient l'inégalité demandée.
On rappelle que V. Lafforgue définit K p.17 comme l'entier tel que pour tout point a de X, le nombre de points de X à distance 1 de a soit inférieur ou égal à K. Ici $X = G$ et la distance est celle des mots. D'où $K = \mid S \mid$ $\square$

Par conséquent, la distance d^{Laff} vérifie toutes les conditions du Théorème 6.8 en remplaçant toutefois $\lambda_2^{d(x,y)}$ par $\frac{1}{1+d(x,y)}$.

Lemme 7.4. *Si h et J_x sont deux homotopies contractantes du complexe de bar augmenté $C_*^{Bar}(G)$, alors pour tout $s \in [0;1]$, $(1-s)J_x + sh$ est également une homotopie contractante du complexe de bar augmenté.*

Preuve : $\partial \circ ((1-s)J_x + sh) + ((1-s)J_x + sh) \circ \partial$
$= (1-s)\left[\partial \circ J_x + J_x \circ \partial\right] + s\left[\partial \circ h + h \circ \partial\right]$
$= (1-s)\left[Id - p_{\{x_0\}}\right] + s\left[Id - p_{\{x_0\}}\right]$
$Id - p_{\{x_0\}}\square$

7.3 Construction des homotopies

Nous allons construire un enchaînement de deux homotopies entre notre triplet et celui de V. Lafforgue.

Construisons une première homotopie.

$$J_{s,t}^1 = e^{td_x^{Laff}}(\partial + [(1-s)J_x + sh^x]\,\partial\,[(1-s)J_x + sh^x])e^{-td_x^{Laff}}$$

Alors $J^1_{0,t} = e^{td_x^{Laff}}(\partial + J_x \partial J_x)e^{-td_x^{Laff}}$ et $J^1_{1,t} = e^{td_x^{Laff}}(\partial + h^x \partial h^x)e^{-td_x^{Laff}}$.

Puis une deuxième homotopie :

$$J^2_{s,t} = e^{t((1-s)d_x^{Laff}+s\tilde{d}_x)}(\partial + h^x \partial h^x)e^{-t((1-s)d_x^{Laff}+s\tilde{d}_x)}$$

Alors $J^2_{0,t} = e^{td_x^{Laff}}(\partial + h^x \partial h^x)e^{-td_x^{Laff}}$ et $J^2_{1,t} = e^{t\tilde{d}_x}(\partial + h \partial h^x)e^{-t\tilde{d}_x}$.

Dans toute la suite, posons :

$$G_{x,t} = e^{td_x^{Laff}} \circ h^x \circ e^{-td_x^{Laff}}$$

Lemme 7.5. *Il existe des constantes $C_{60}(\delta, \mid S \mid, R)$ et $C_{63}(\delta, \mid S \mid, R, t)$ telles que pour tous simplexes $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$:*

1. *si $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$ alors, on a :*

$$d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha))$$
$$\leq d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) + C_{60}(\delta, \mid S \mid, R)$$

2. $|< G_{x,t}(\alpha), \beta >| \leq C_{63} \cdot e^{t\cdot(d(x,Supp(\beta)-d(x,Supp(\alpha)))}$

Preuve :
1ère étape : Soient $u \in Supp(\alpha)$ et $v \in Supp(\beta)$ tels que :

$$d^{Laff}(x, u) = d^{Laff}(x, Supp(\alpha)) \text{ et } d^{Laff}(x, v) = d^{Laff}(x, Supp(\beta))$$

Or $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30}(\delta, \mid S \mid, R)$. Donc :

$$v \in B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30}(\delta, \mid S \mid, R))$$

Majorons $d(v, geod(\{x, u\}) \cap G)$.
Étant donné que d est la métrique des mots, d'après le Lemme 6.11 :

$$d(v, geod(\{x, u\}) \cap G) \leq C_{30}(\delta, \mid S \mid, R) + \delta + R + 1 = C_{61}(\delta, \mid S \mid, R)$$

Soit donc $w \in geod(\{x, u\}) \cap G$ tel que : $d(v, w) \leq C_{61}(\delta, \mid S \mid, R)$
On a :

$d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha)) = d^{Laff}(x, v) - d^{Laff}(x, u)$
$\leq d^{Laff}(x, w) + d^{Laff}(w, v) - d^{Laff}(x, u)$
$\leq d^{Laff}(x, w) - \hat{d}(x, u) + d(w, v) + 7\delta$ car $d^{Laff}(w, v) \leq d(w, v) + 7\delta$
$\leq -d^{Laff}(u, w) + 14\delta + C_{61}(\delta, \mid S \mid, R) + 7\delta$ d'après le Lemme 7.2
$\leq -d^{Laff}(u, w) + C_{62}(\delta, \mid S \mid, R)$ si

$$C_{62}(\delta, \mid S \mid, R) = C_{61}(\delta, \mid S \mid, R) + 21\delta$$

$\leq -d(u,w) + C_{62}(\delta, \mid S \mid, R)$ car $d(u,w) \leq d^{Laff}(u,w)$
$\leq d(x,w) - d(x,u) + C_{62}(\delta, \mid S \mid, R)$ car $w \in geod(\{x,u\})$
$\leq d(x,v) + d(v,w) - d(x,u) + C_{62}(\delta, \mid S \mid, R)$ par inégalité triangulaire

Par ailleurs :

1. $d(v,w) \leq C_{61}(\delta, \mid S \mid, R)$
2. $d(x, Supp(\alpha)) \leq d(x,u)$ car $u \in Supp(\alpha)$
3. Soit $v' \in Supp(\beta)$ tel que $d(x,v') = d(x, Supp(\beta))$, alors :

   $d(x,v) \leq d(x,v') + d(v',v) \leq d(x, Supp(\beta)) + R$ car $v, v' \in Supp(\beta)$

Il vient :

$d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha))$
$\leq d(x, Supp(\beta)) + R + C_{61}(\delta, \mid S \mid, R) - d(x, Supp(\alpha)) + C_{62}(\delta, \mid S \mid, R)$
$\leq d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) + C_{60}(\delta, \mid S \mid, R)$ avec

$$C_{60}(\delta, \mid S \mid, R) = R + C_{61}(\delta, \mid S \mid, R) + C_{62}(\delta, \mid S \mid, R) \square$$

2ème étape : Comme dans la Proposition 6.12, on montre que :

$$< G_{x,t}(\alpha), \beta >= e^{t(d^{Laff}(x,Supp(\beta)) - d^{Laff}(x,Supp(\alpha)))} < h^x(\alpha), \beta >$$

qui est nul, sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$$

D'où :

$|< G_{x,t}(\alpha), \beta >|$
$\leq e^{t(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha)) + C_{60}(\delta,|S|,R))} < h^x(\alpha), \beta >$ d'après la première étape
$\leq e^{t(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha)) + C_{60}(\delta,|S|,R))} \cdot C_{31}(\delta, \mid S \mid, R))$ d'après le Théorème 5.29
$\leq C_{63} \cdot e^{t \cdot (d(x,Supp(\beta) - d(x,Supp(\alpha)))}$

si $C_{63}(\delta, \mid S \mid, R, t) = C_{31}(\delta, \mid S \mid, R) \cdot e^{t \cdot C_{60}(\delta,|S|,R))}$

Lemme 7.6. *Pour tout $x \in G$ et tout $t > ln(\mid S \mid)$, l'application linéaire $G_{x,t} : C_*^R(G, \mathbb{C}) \to C_*^R(G, \mathbb{C})$ se prolonge en un opérateur linéaire borné entre espaces de Hilbert.*

Preuve : On s'inspire de la preuve de la Proposition 6.19.
Remarquons tout d'abord que :

$G_{x,t,n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} P_{x,k,n+1} \circ G_{x,t,n} \circ P_{x,k+r,n})$

Soit $G_{x,t,r,k,n} = P_{x,k,n+1} \circ F_{x,t,n} \circ P_{x,k+r,n}$.
Pour $\alpha \in \Delta_n^R(G)$ et $\beta \in \Delta_{n+1}^R(G)$, on a

$< G_{x,t,r,k,n}(\alpha), \beta >$
$=< G_{x,t,n}(\alpha), \beta >$ si $d(x, Supp(\beta)) = k$ et si $d(x, Supp(\alpha)) = k + r$
$= 0$ sinon

Posons $G_{x,t,r,n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_{x,t,r,k,n}$. Alors :

$$G_{x,t} = \sum_{n=0}^{C_{24}(|S|,R)} F_{x,t,n} \text{ avec } G_{x,t,n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F_{x,t,r,n}$$

et $< G_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >= \sum\limits_{k=0}^{\infty} < P_{x,k,n+1} \circ G_{x,t} \circ P_{x,k+r,n}(\alpha), \beta >$

D'après le Lemme 7.5 et le Lemme 6.18 : $G_{x,t}(\alpha) = \sum\limits_{\gamma \in B} < F_{x,t}(\alpha), \gamma >$
avec

$$B = B(Supp(\alpha), d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) + 2C_{30} + 2R)$$

D'où : $< G_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >= \sum\limits_{\gamma \in B} < F_{x,t}(\alpha), \gamma >< P_{x,d(x,Supp(\alpha))-r,n+1}(\gamma), \beta >$ si

$$< G_{x,t,r,n}(\alpha), \beta >=< F_{x,t}(\alpha), \beta >= c_{\beta,\alpha}$$

Alors $c_{\beta,\alpha} = 0$ sauf éventuellement lorsque

$$Supp(\beta) \subset B(Supp(\alpha), r + 2C_{30} + 2R)$$

On sait que :

1. $card(\{\beta, c_{\beta,\alpha} \neq 0\}) \leq Vol(B(Supp(\alpha), r + 2C_{30} + 2R))$
2. $card(\{\alpha, c_{\beta,\alpha} \neq 0\}) \leq Vol(B(Supp(\beta), r + 2C_{30} + 3R))$

Lorsque $G_{x,t,r,n} \neq 0$, on a d'après le Lemme 7.5 :

$| c_{\beta,\alpha} |\leq C_{63} \cdot e^{t(d(x,Supp(\beta))-d(x,Supp(\alpha)))} = C_{63} \cdot e^{-t \cdot r}$

D'après le Lemme 6.15, $G_{x,t,r,n}$ admet un prolongement $\tilde{G}_{x,t,r,n} \in \mathscr{L}(l^2(\triangle_n(G)))$ tel que :

$$\left\| \tilde{G}_{x,t,r,n} \right\| \leq C_{67} \cdot (| S | \cdot e^{-t})^r \text{ pour } r \geq -2C_{30}(\delta, | S |, R) - 2R$$

avec :

$C_{67}(\delta, \mid S \mid, R, n, t) =$
$C_{63}(\delta, \mid S \mid, R, n, t) \cdot \sqrt{(n+1)(n+2)} \cdot \mid S \mid^{2C_{30}(\delta,|S|,R)+R(3+n)}$

Ainsi $G_{x,t,n}$ est également prolongeable sur $l^2(\triangle_n(G))$ en un opérateur linéaire **borné** avec :

$$\left\|\tilde{G}_{x,t,n}\right\| \leq \sum_{r \geq -2C_{33}-2R} \left\|\tilde{G}_{x,t,r,n}\right\|$$

$$\leq C_{67}(\delta, \mid S \mid, R, n, t) \cdot \sum_{r \geq -2C_{33}-2R} (\mid S \mid \cdot e^{\frac{-t}{20\delta}})^r$$

si $\mid S \mid \cdot e^{-t} < 1$ c'est-à-dire si $t > ln(\mid S \mid)$.

$G_{x,t} = \sum_{n=0}^{C_{24}(|S|,R)} G_{x,t,n}$ est donc alors également prolongeable en un opérateur linéaire **borné** comme somme finie d'opérateurs prolongeables en un opérateur linéaire borné.□

Lemme 7.7. *Pour tout $g \in G$, et pour tout $t > ln(\mid S \mid)$, $\left[e^{td_x^{Laff}} \circ h^x \circ e^{-td_x^{Laff}}, \pi(g)\right]$ est un opérateur compact.*

Preuve :
En reprenant les arguments de la Proposition 6.21, pour montrer la compacité de

$$\left[e^{td^{Laff}} \circ h^x \circ e^{-td^{Laff}}, \pi(g)\right]$$

pour tout $g \in G$, il suffit de montrer la compacité de

$$e^{td^{Laff}} \circ h^x \circ e^{-td^{Laff}} - e^{td^{Laff}} \circ h^{x'} \circ e^{-td^{Laff}}$$

pour tout $x' \in G$.
Rappelons que $G_{x,t} = e^{td^{Laff}} \circ h^x \circ e^{-td^{Laff}}$.
Alors,comme dans la Proposition 6.12, on montre que :

$$< G_{x,t}(\alpha), \beta >= e^{t(d^{Laff}(x,Supp(\beta)) - d^{Laff}(x,Supp(\alpha))} < h^x(\alpha), \beta >$$

D'après le Théorème 5.29, il existe une constante $C_{30}(\delta, \mid S \mid, R, d(x,x'), n)$ telle que les coefficients de matrice $< h_n^x(\alpha), \beta >$ sont nuls sauf éventuellement lorsque $Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$.
Il suffit donc de s'intéresser aux simplexes α et β tels que

$$Supp(\beta) \subset B(geod(Supp(\alpha) \cup \{x\}), C_{30})$$

1ère étape : transformons l'écriture.
Remarquons que $G_{x,0} = h^x$ d'où :

$$G_{x,t} = e^{td^{Laff}} \circ h^x \circ e^{-td^{Laff}} = e^{t\hat{d}_x} \circ G_{x,0} \circ e^{-t\hat{d}_x}$$

Il vient :

$$G_{x,t} - G_{x',t} = e^{t\hat{d}_{x'}} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_{x'}} - e^{td^{Laff}_x} \circ F_{x,0} \circ e^{-td^{Laff}_x}$$
$$= e^{td^{Laff}_{x'}} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_{x'}} - e^{td^{Laff}_x} \circ G_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x} + e^{td^{Laff}_x} \circ (G_{x',0} - G_{x,0}) \circ e^{-td^{Laff}_x}$$

2ème étape : $|< (e^{td^{Laff}_{x'}} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_{x'}} - e^{td^{Laff}_x} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_x})(\alpha), \beta >|$
De la même manière qu'au début de la preuve de la Proposition6.12, on montre que :

$$< e^{td^{Laff}_{x'}} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_{x'}}(\alpha), \beta >$$
$$= e^{t(d^{Laff}(x',Supp(\beta)) - d^{Laff}(x',Supp(\alpha)))} < G_{x',0}(\alpha), \beta >$$
$$= e^{t(d^{Laff}(x',Supp(\beta)) - d^{Laff}(x',Supp(\alpha)))} < h^{x'}(\alpha), \beta >$$

Il vient :

$$|< (e^{td^{Laff}_{x'}} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_{x'}} - e^{td^{Laff}_x} \circ G_{x',0} \circ e^{-td^{Laff}_x})(\alpha), \beta >| =|$$
$$e^{t(d^{Laff}(x',Supp(\beta)) - \hat{d}(x',Supp(\alpha))} - e^{t(d^{Laff}(x,Supp(\beta)) - \hat{d}(x,Supp(\alpha))} | \cdot |< h^{x'}(\alpha), \beta >|$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$| e^{t(d^{Laff}(x',Supp(\beta)) - d^{Laff}(x',Supp(\alpha))} - e^{t(d^{Laff}(x,Supp(\beta)) - d^{Laff}(x,Supp(\alpha)))} |$$
$$\leq t \mid (d^{Laff}(x', Supp(\beta)) - d^{Laff}(x', Supp(\alpha)) - ((d^{Laff}(x, Supp(\beta)) -$$
$$d^{Laff}(x, Supp(\alpha))) \mid \cdot \max_{y \in \{x,x'\}} e^{t(d^{Laff}(y,Supp(\beta)) - d^{Laff}(y,Supp(\alpha)))}$$

Majorons $\max_{y \in \{x,x'\}} e^{t(d^{Laff}(y,Supp(\beta)) - d^{Laff}(y,Supp(\alpha))}$.

Si $y = x$: soit $u \in Supp(\beta)$ tel que $\hat{d}(x, Supp(\beta)) = \hat{d}(x, u)$,$u' \in Supp(\beta)$ tel que $\hat{d}(x', Supp(\beta)) = \hat{d}(x', u')$ et $v \in Supp(\alpha)$ tel que $\hat{d}(x, Supp(\beta)) = \hat{d}(x, u)$.
On sait que :

1. $d^{Laff}(x, u) \leq \hat{d}(x, x') + d^{Laff}(x', u)$
2. $d^{Laff}(x', v) \leq \hat{d}(x, x') + d^{Laff}(x, v)$ d'où $-d^{Laff}(x, v) \leq d^{Laff}(x, x') - d^{Laff}(x', v)$

Ainsi :

$$d^{Laff}(y, Supp(\beta)) - d^{Laff}(y, Supp(\alpha)) = d^{Laff}(x, u) - d^{Laff}(x, v)$$
$$\leq 2d^{Laff}(x, x') + \hat{d}(x', u) - d^{Laff}(x', v)$$

Or $d^{Laff}(x', v) \geq d^{Laff}(x', Supp(\alpha))$ donc $-\hat{d}(x', v) \leq -\hat{d}(x', Supp(\alpha))$ et :

$d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha))$
$\leq 2\hat{d}(x, x') + d^{Laff}(x', u) - \hat{d}(x', Supp(\alpha))$
$\leq 2d^{Laff}(x, x') + \hat{d}(x', u') + d^{Laff}(u', u) - \hat{d}(x', Supp(\alpha))$
$\leq d^{Laff}(x', Supp(\beta)) - d^{Laff}(x', Supp(\alpha)) + 2\hat{d}(x, x') + R + 7\delta$
$\leq d^{Laff}(x', Supp(\beta)) - d^{Laff}(x', Supp(\alpha)) + 2d(x, x') + 21\delta + R$ d'après 6.8

Si $y = x'$ **:** alors la majoration obtenue ci-dessus est triviale.
De la même manière, par symétrie :

$d^{Laff}(x', Supp(\beta)) - d^{Laff}(x', Supp(\alpha))$
$\leq d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha)) + 2d(x, x') + 21\delta + R$

Ainsi :

$\mid e^{t(d^{Laff}(x', Supp(\beta)) - d^{Laff}(x', Supp(\alpha)))} - e^{t(d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha)))} \mid$
$\leq t \max_{u \in Supp(\alpha), v \in Supp(\beta)} \mid d^{Laff}(x', v) - d^{Laff}(x', u) - ((\hat{d}(x, v) - d^{Laff}(x, u)) \mid$
$\cdot e^{t(d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha)) + 4d(x, x') + 42\delta + 2R)}$

D'après le Lemme 7.5 :

$$d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha))$$
$$\leq d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)) + C_{60}(\delta, \mid S \mid, R)$$

Donc :

$$\mid e^{t(d^{Laff}(x', Supp(\beta)) - d^{Laff}(x', Supp(\alpha)))} - e^{t(d^{Laff}(x, Supp(\beta)) - d^{Laff}(x, Supp(\alpha)))} \mid$$
$$\leq C_{70} \cdot \max_{u \in Supp(\alpha), v \in Supp(\beta)} \mid d^{Laff}(x', v) - d^{Laff}(x', u) - ((d^{Laff}(x, v) - d^{Laff}(x, u)) \mid \cdot e^{t(d(x, Supp(\beta)) - d(x, Supp(\alpha)))}$$

avec $C_{70} = t \cdot e^{t(C_{60}(\delta, |S|, R)) + 4d(x, x') + 42\delta + 2R))} = C_{40}(\delta, \mid S \mid, R, d(x, x'), n, t)$

3ème étape : Majoration de $\mid d^{Laff}(x', v) - d^{Laff}(x', u) - ((d^{Laff}(x, v) - d^{Laff}(x, u)) \mid$

a) Première majoration

Désignons par $[x, x']$ une géodésique de x à x' et $[u, v]$ une géodésique de u à v, d étant la métrique des mots, nous aurons :

Comme dans la troisième étape de la preuve de la Proposition 6.13 :

$\mid ((d^{Laff}(x', v) - (d^{Laff}(x', u) - (((d^{Laff}(x, v) - \hat{d}(x, u)) \mid$
$\leq \sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} \mid (d^{Laff}([x, x'](k), [u, v](l) - (d^{Laff}([x, x'](k), [u, v](l-1) -$
$(d^{Laff}([x, x'](k-1), [u, v](l) + (d^{Laff}([x, x'](k-1), [u, v](l-1) \mid$

Or $d([u,v]\,(l),[u,v]\,(l-1)) = d([x,x']\,(k),[x,x']\,(k-1)) = 1$, on peut donc appliquer 7.3 :

$$| \, d^{Laff}(x',v) - d^{Laff}(x',u) - ((d^{Laff}(x,v) - \hat{d}(x,u)) \, |$$
$$\leq \sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} \tfrac{C_{10}(\delta,|S|)}{1+d([x,x'](k),[u,v](l))}$$

Or $d([x,x']\,(k),[u,v]\,(l)) \geq d([x,x']\,,[u,v])$ donc :

$$| \, d^{Laff}(x',v) - d^{Laff}(x',u) - ((d^{Laff}(x,v) - d^{Laff}(x,u)) \, |$$
$$\leq C_{10}(\delta, | \, S \, |) \sum_{k=1}^{d(x,x')} \sum_{l=1}^{d(u,v)} \tfrac{1}{1+d([x,x'],[u,v]))} = \tfrac{C_{10}(\delta,|S|)\cdot d(x,x')\cdot d(u,v)}{1+d([x,x'],[u,v]))}$$

b) De la même manière que dans la troisième étape de la preuve de la Proposition 6.13 on montre qu'il existe une constante $C_{710}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x'))$ telle que :

$$d(u,v) \leq C_{710}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x')) \cdot (| \, d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \, | +1)$$

avec $C_{710}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x')) = 1 + 4R + 2d(x,x') + 2C_{30}(\delta, | \, S \, |, R)$

ainsi qu'une constante $C_{711}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x'))$ telle que :

$$d([x,x']\,,[u,v]) \geq d(x, Supp(\beta)) - C_{711}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x'))$$

avec : $C_{711}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x')) = 5R + 3d(x,x') + 2C_{30}(\delta, | \, S \, |, R)$

c) Conclusion : Nous savons que

$$| \, d^{Laff}(x',v) - d^{Laff}(x',u) - ((d^{Laff}(x,v) - d^{Laff}(x,u)) \, |$$
$$\leq \tfrac{C_{10}(\delta,|S|)\cdot d(x,x')\cdot d(u,v)}{1+d([x,x'],[u,v]))}$$

et que :

1. $d(u,v) \leq C_{710} \cdot (| \, d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \, | +1)$
2. $d([x,x']\,,[u,v]) \geq d(x, Supp(\beta)) - C_{411}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x'))$

Donc :

$$| \, (d^{Laff}(x',v) - d^{Laff}(x',u) - ((d^{Laff}(x,v) - d^{Laff}(x,u)) \, |$$
$$\leq C_{10} \cdot d(x,x') \cdot C_{710} \cdot (| \, d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \, | +1)) \cdot \tfrac{1}{1+d([x,x'],[u,v])}$$
$$\leq C_{71} \cdot (| \, d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) \, | +1)) \cdot \tfrac{1}{1+d(x,Supp(\beta))}$$

Avec

$C_{71}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x')) =$
$C_{10}(\delta, | \, S \, |) \cdot C_{710}(\delta, | \, S \, |, R, d(x,x'))$

4ème étape :

$|< (e^{td_{x'}^{Laff}} \circ G_{x',0} \circ e^{-td_{x'}^{Laff}} - e^{td_x^{Laff}} \circ G_{x',0} \circ e^{-t\hat{d}_x})(\alpha), \beta >|$
$\leq C_{70} \cdot \max_{u \in Supp(\alpha), v \in Supp(\beta)} | d^{Laff}(x', v) - d^{Laff}(x', u) - ((d^{Laff}(x, v) - d^{Laff}(x, u)) |$
$\cdot e^{t(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))} \cdot |< h^{x'}(\alpha), \beta >|$ d'après la 2ème étape

$\leq C_{70} \cdot C_{36} \cdot C_{71} \cdot (| d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) | +1)) \cdot \frac{1}{1+d(x,Supp(\beta))} \cdot$
$e^{t(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))}$ d'après le Théorème 5.29 et la 3ème étape.

5ème étape : Majoration de $<| e^{t\hat{d}_x} \circ (G_{x',0} - G_{x,0}) \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$
Par définition :

$F_{x',0} - F_{x,0} = h^{x'} - h^x$

Nous savons d'après le Théorème 5.29 que :

$$|< (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >| \leq C_{32}(\delta, | S |, R, d(x, x')) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$$

Donc :

$|< e^{t\hat{d}_x} \circ (h^{x'} - h^x) \circ e^{-t\hat{d}_x}(\alpha), \beta >|$
$= e^{t(\hat{d}(x,Supp(\beta) - \hat{d}(x,Supp(\alpha))} \cdot |< (h^{x'} - h^x)(\alpha), \beta >|$
$\leq e^{t(d(x,Supp(\beta) - d(x,Supp(\alpha))) + tC_{60}} \cdot C_{32}(\delta, | S |, R, d(x, x')) \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$ d'après le Lemme 7.5.

6ème Etape : Conclusion

$|< (G_{x',t} - G_{x,t})(\alpha), \beta >|$
$\leq C_{70} \cdot C_{36} \cdot C_{71} \cdot (| d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) | +1) \cdot \frac{1}{1+d(x,Supp(\beta))} \cdot$
$e^{t(d(x,Supp(\beta)) - d(x,Supp(\alpha))} + e^{t(d(x,Supp(\beta) - d(x,Supp(\alpha))) + tC_{60}} \cdot C_{32} \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))}$
$\leq (| d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) | +1)) \cdot e^{t(d(x,Supp(\beta) - d(x,Supp(\alpha)))}$
$\cdot (\frac{C_{70} \cdot C_{36} \cdot C_{71}}{1+d(x,Supp(\beta))} + e^{tC_{60}} \cdot C_{32} \cdot \lambda_4^{d(x,Supp(\beta))})$

Posons $\phi(s) = \frac{C_{70} \cdot C_{36} \cdot C_{71}}{1+s} + e^{tC_{60}} \cdot C_{32} \cdot \lambda_4^s$ alors $\lim_{s \to +\infty} \phi(s) = 0$.
Alors :

$|< (G_{x',t} - G_{x,t})(\alpha), \beta >|$
$\leq (| d(x, Supp(\alpha)) - d(x, Supp(\beta)) |$
$+1)) \cdot e^{t(d(x,Supp(\beta) - d(x,Supp(\alpha)))} \cdot \phi(d(x, Supp(\beta)))$

De la même manière que dans la 1ère étape du Théorème 6.22, on montre alors que $G_{x',t} - G_{x,t}$ est un opérateur compact $\square$

Proposition 7.8. *Pour t suffisamment grand : pour tout $s \in [0;1]$, $\left[J^1_{s,t}, \pi(g)\right]$ est un opérateur compact.*

Preuve :

$J^1_{s,t} = e^{td_x^{Laff}}(\partial + [(1-s)J_x + sh^x]\,\partial\,[(1-s)J_x + sh^x])e^{-td_x^{Laff}}$
$= e^{td_x^{Laff}}\partial e^{-td_x^{Laff}} + e^{td_x^{Laff}}([(1-s)J_x + sh^x]\,\partial\,[(1-s)J_x + sh^x])e^{-td_x^{Laff}}$

Or :

$e^{td_x^{Laff}}([(1-s)J_x + sh^x]\,\partial\,[(1-s)J_x + sh^x])e^{-td_x^{Laff}}$
$= \left[e^{td^{Laff}}([(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td^{Laff}}\right]\partial\left[e^{td^{Laff}}\,[(1-s)J_x + sh^x])e^{-td_x^{Laff}}\right]$ car ∂ et $e^{td_x^{Laff}}$ commutent

Ainsi :

$\left[J^1_{s,t}, \pi(g)\right]$
$= e^{td_x^{Laff}}\,[(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td_x^{Laff}}\partial\left[e^{td^{Laff}}([(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td^{Laff}}, \pi(g)\right]$
$+ e^{td^{Laff}}([(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td^{Laff}}\,[\partial, \pi(g)]\,e^{td^{Laff}}\,[(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td^{Laff}}$
$+ \left[e^{td_x^{Laff}}([(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td_x^{Laff}}, \pi(g)\right]\partial\,[(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td_x^{Laff}}$

Étudions chaque terme :

1. $[\partial, \pi(g)] = \partial \circ \pi(g) - \pi(g) \circ \partial = 0$ d'après le Lemme 6.20
2. $e^{td_x^{Laff}}([(1-s)J_x + sh]\,e^{-td_x^{Laff}}$
   $= (1-s)e^{td_x^{Laff}}J_x e^{-td^{Laff}} + se^{td_x^{Laff}}he^{-td_x^{Laff}}$
   Or, pour t suffisamment grand, $\left[e^{td_x^{Laff}}J_x e^{-td_x^{Laff}}, \pi(g)\right]$ est un opérateur compact car les opérateurs construits par V. Lafforgue sont $G-$équivariants à compact près (Cf. [Laf], Lemme 5.2 p.200 : le module construit par V. Lafforgue vérifie les mêmes conditions qu'un élément de $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ à l'exception de celle qui assure que l'opérateur est autoadjoint à compact près). Et $\left[e^{td^{Laff}}h^x e^{-td^{Laff}}, \pi(g)\right]$ est également compact d'après le Lemme 7.7.
   On en déduit que $\left[e^{td^{Laff}}\,[(1-s)J_x + sh^x]\,e^{-td^{Laff}}, \pi(g)\right]$ est compact.

Or $\mathscr{K}(\mathscr{H}^{as})$ est un idéal de $\mathscr{B}(\mathscr{H}^{as})$ donc $\left[J^1_{s,t}, \pi(g)\right]$ est bien compact $\square$

Proposition 7.9. *Pour tout $s \in [0;1]$, $(J^1_{s,t})^2 - 1$ est un opérateur compact.*

Preuve : Notons $k^x_s = (1-s)J_x + sh^x$, alors d'après le Lemme 7.4, k^x_s est une homotopie contractante de complexes de Bar augmentés.

$J^1_{s,t} = e^{td_x^{Laff}}(\partial + [(1-s)J_x + sh^x]\,\partial\,[(1-s)J_x + sh^x])e^{-td_x^{Laff}}$
$= e^{td_x^{Laff}}(\partial + k_s^x\partial k_s^x)e^{-td_x^{Laff}}$

Posons $l_s^x = k_s^x\partial k_s^x$.
Alors :

$(J^1_{s,t})^2 =$
$= e^{td_x^{Laff}}(\partial + l_s^x)(\partial + l_s^x)e^{-td_x^{Laff}}$
$= e^{td_x^{Laff}}(\partial l_s^x + l_s^x\partial + l_s^x l_s^x)e^{-td_x^{Laff}}$

En reprenant les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 6.24, on montre que, modulo un opérateur compact, on a :

1. $l_s^x l_s^x = 0$
2. $\partial l_s^x + l_s^x\partial = 1$

D'où, à un opérateur compact près : :

$$(J^1_{s,t})^2 = e^{td_x^{Laff}}(1)e^{-td_x^{Laff}} = 1\square$$

D'après les Propositions 7.8 et 7.9, $(J^1_{s,t})_{s\in[0;1]}$ définit donc bien une homotopie entre triplets $\square$

Proposition 7.10. *Pour tout $s \in [0;1]$, $\left[J^2_{s,t}, \pi(g)\right]$ est un opérateur compact.*

Preuve :

$\left[J^2_{s,t}, \pi(g)\right] = \left[e^{t((1-s)d_x^{Laff}+s\tilde{d}_x)}(\partial + h^x\partial h^x)e^{-t((1-s)d_x^{Laff}+s\tilde{d}_x)}, \pi(g)\right]$
Pour tout $s \in [0;1]$, soit la distance $d_x^s = (1-s)d_x^{Laff} + s\tilde{d}_x$

Alors :

$$\left[J^2_{s,t}, \pi(g)\right] = \left[e^{t\cdot d_x^s}(\partial + h^x\partial h^x)e^{-t\cdot d_x^s}, \pi(g)\right]$$

1. d_x^{Laff} et $\tilde{d}_x$ étant équivariantes sur G, il en est de même pour d_x^s
2. d_x^{Laff} et $\tilde{d}_x$ étant toutes les deux quasi-isométriques à la métrique des mots, il est est de même pour d_x^s
3. d'après le Théorème 6.8 et le Lemme 7.3 :

$$\sup_{d(x,x')=d(y,y')=1} \mid d^s(x,y) - d^s(x',y) - d^s(x,y') + d^s(x',y') \mid\leq$$
$$\tfrac{C_{10}(\delta,|S|)}{1+d(x,y)} + C_2(\delta,\mid S\mid)\lambda_2(\delta,\mid S\mid)^{d(x,y)}$$

4. d'après le Théorème 6.8 et le Lemme 7.2, pour tous $x, y \in G$ et tout $z \in geod(\{x, y\})$:

$$\mid d^s(x,z) + d^s(z,y) - d^s(x,y) \mid \leq C_3(\delta, \mid S \mid) + 14\delta$$

Il suffit alors de reprendre tous les arguments de la preuve du Théorème 6.22 pour montrer la compacité du commutateur □

Proposition 7.11. *Pour tout $s \in [0;1]$, $(J^2_{s,t})^2 - 1$ est un opérateur compact.*

Preuve :

$(J^2_{s,t})^2 = e^{t((1-s)d^{Laff}+s\tilde{d}_x)}(\partial + h^x\partial h^x)(\partial + h^x\partial h^x)e^{-t((1-s)d^{Laff}+s\tilde{d}_x)}$
$= e^{t(1-s)d^{Laff}}e^{ts\tilde{d}_x}(\partial + h^x\partial h^x)(\partial + h^x\partial h^x)e^{-ts\tilde{d}_x})e^{-t(1-s)d^{Laff}}$
$= e^{t(1-s)d^{Laff}}(F^2_{x,ts})e^{-t(1-s)d^{Laff}}$
$= e^{t(1-s)d^{Laff}}(1+K)e^{-t(1-s)d^{Laff}}$ où K est un opérateur compact (d'après la Proposition 6.24)
$= 1 + e^{t(1-s)d^{Laff}}Ke^{-t(1-s)d^{Laff}}$

Or, l'ensemble des opérateurs compacts forme un idéal bilatère de $\mathscr{L}(\mathscr{H}^{as})$ donc

$$e^{t(1-s)d^{Laff}}Ke^{-t(1-s)d^{Laff}}$$

est bien compact □

D'après les Propositions 7.10 et 7.11, $(J^2_{s,t})_{s\in[0;1]}$ définit bien une homotopie entre triplets.
Nous venons donc de démontrer que notre triplet $\mathscr{E}_{x,t} = (\mathscr{H}^{as}, \pi, F_{x,t})$ est homotope au triplet défini par V. Lafforgue (lui-même homotope à l'élément gamma de G. Kasparov et G. Skandalis).

7.4 De prémodules aux véritables modules de Fredholm

D'après ce qui précède, notre triplet représente l'élément gamma. Cependant, il s'agit seulement d'un pré-module de Fredholm(car il n'est pas auto-adjoint modulo un opérateur compact). Nous allons finalement construire une homotopie parmi les prémodules de Fredholm finiment sommables entre notre prémodule $\varepsilon_{x,t}$ et un véritable module de Fredholm finiment sommable représentant un élément Gamma réduit pour Γ.

Proposition 7.12. *Pour $t >> 0$, il existe un opérateur borné $\tilde{F}_{x,t}$ tel que le pré-module $(\mathscr{H}^{as}, \pi, \tilde{F}_{x,t})$ est un véritable module de Fredholm canoniquement homotope à $(\mathscr{H}^{as}, \pi, F_{x,t})$ parmi des pré-modules p-sommables.*

Preuve : Nous allons travailler dans les algèbres $\mathscr{R}_0 = \mathscr{L}(\mathscr{H})/\mathscr{F}$ et $\mathscr{R}_1 = \mathscr{L}(\mathscr{H})/\ell^p(\mathscr{H})$ où $\mathscr{F}$ désigne l'idéal des opérateurs de rang fini.
La démonstration qui suit s'inspire de B.Blackadar ([Bl], Proposition 4.6.2 p 28).
Choisissons $t > 20\delta \cdot ln(\mid S \mid)$. D'après les deux propriétés précédentes, $F_{x,t}^2 - 1 \in \mathscr{R}_0$ et pour tout $g \in G$: $[F_{x,t}, \pi(g)] \in \mathscr{R}_1$.

1ère étape : Dans toute algèbre A il existe une bijection entre :

1. l'ensemble des éléments F tels que $F^2 = 1$
2. l'ensemble des éléments idempotents

Soit un opérateur tel que $F^2 = 1$. Alors A est somme directe des deux espaces propres associés E_1 et E_{-1}. Alors $e = \frac{1+F}{2}$ est la projection sur E_1 le long de E_{-1}. En effet :

1. $e \circ e = \frac{1+2F+F^2}{4} = \frac{1+2F+1}{4} = e$
2. si $u \in E_1$ alors $e(u) = \frac{u+F(u)}{2} = \frac{u+u}{2} = u$

Réciproquement, soit $e \in A$ un idempotent. Posons $F = 2e - 1$. Alors :

$$F^2 = (2e-1) \circ (2e-1) = 4e^2 - 2e - 2e + 1 = 4e - 4e + 1 = 1$$

Notons ψ cette bijection telle que $\psi(F) = \frac{1+F}{2}$ et $\psi^{-1}(e) = 2e - 1$

2ème étape : Montrons que tout triplet $(\mathscr{H}, \pi, F)$ est homotope à un triplet $(\mathscr{H}, \pi, \tilde{F})$ avec $\tilde{F}$ autoadjoint dans $\mathscr{R}_0$.

Soit $p = \frac{1+F_{x,t}}{2}$ qui est un opérateur idempotent.
Posons $z = 1 + (p - p^*)(p^* - p)$. On sait que $(p - p^*)(p^* - p)$ est un opérateur positif dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ donc le spectre de z est inclus dans $[1; +\infty[$.
$0 \notin [1; +\infty[$ donc z est inversible, notons $r = z^{-1}$.

On a :

$pz = p(1 + (p - p^*)(p^* - p)) = p(1 + pp^* - p - p^* + p^*p)$ car $p^*p^* = (pp)^* = p^*$
$= p + ppp^* - p - pp^* + pp^*p$
$= p + pp^* - p - pp^* + pp^*p$
$= pp^*p$

Le même calcul conduit à l'égalité $pz = zp = pp^*p$.
On sait que :

$$zp = pz \iff rzp = rpz \iff p = rpz \iff pr = rpzr \iff pr = rp$$

De la même manière, on montre que $p^*z = zp^* = p^*pp^*$ d'où $rp^* = p^*r$.
Posons maintenant $q = pp^*r$, alors q est un projecteur auto-adjoint. En effet :

1. $q^* = r^*pp^* = rpp^* = prp^* = pp^*r = q$, en effet $r = r^*$ car $z = z^*$
2. $q^2 = pp^*rpp^*r = rpp^*pp^*r = rpp^*pp^*r$
   $= r(pp^*p)p^*r = rzpp^*r = pp^*r = q$

On remarquera en particulier que si p est auto-adjoint alors $z = r = 1$ et $q = pp1 = p$.
On montre facilement que toutes les égalités précédentes restent valables dans $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$.

Pour tout $t \in [0;1]$, posons : $\tilde{h}_t = (1-t)p + tq$ et $h_t = \psi^{-1}(\tilde{h}_t) = 2\tilde{h}_t - 1$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.
Alors pour tout $t \in [0;1]$, $\tilde{h}_t$ est une projection. En effet :

$\tilde{h}_t^2 = [(1-t)p + tq]\,[(1-t)p + tq]$
$= (1-t)^2p^2 + t(1-t)pq + t(1-t)qp + t^2q^2$
$= (1-t)^2p + t(1-t)q + t(1-t)p + t^2q$
$= (1 - 2t + t^2 + t - t^2)p + (t - t^2 + t^2)q$
$= (1-t)p + tq$
$= \tilde{h}_t$

Montrons maintenant que h_t définit une homotopie entre triplets de $E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$:

1. On sait que $\tilde{h}_t^2 = \tilde{h}_t$ donc d'après la première étape, pour tout $t \in [0;1]$, $h_t^2 = 1$. On en déduit que $h_t^2 - 1 = 0$ dans $\mathscr{R}_0$, donc que $h_t^2 - 1$ est un opérateur compact de $\mathscr{L}(\mathscr{H}^{as})$.
2. De plus, tous les membres des égalités établies au début de cette étape commutent avec $\pi(g)$. En effet, dans l'algèbre $\mathscr{R}_0$, pour tout $g \in G$: $[F_{x,t}, \pi(g)] = 0$. Par conséquent p commute avec $\pi(g)$ pour tout $g \in G$. Montrons que p^* commute aussi avec $\pi(g)$ pour tout $g \in G$:

   $[\pi(g), p^*] = [p, \pi(g)^*]^*$
   $= [p, \pi(g)^{-1}]^*$ car π est une représentation unitaire
   $= 0^* = 0$ dans les algèbres $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$

   Par conséquent, pour tout $t \in [0;1]$, h_t commute avec $\pi(g)$. On en déduit que $[h_t, \pi(g)] = 0$ dans $\mathscr{R}_0$, c'est-à-dire que $[h_t, \pi(g)]$ est compact dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}^{as})$.

h_t définit donc bien une homotopie entre les deux triplets.

3ème étape : Nous avons prouvé que notre triplet $(\mathscr{H}^{as}, \pi, F_{x,t})$ est homotope au triplet défini par V. Lafforgue, lui-même homotope à l'élément gamma de G. Kasparov et G. Skandalis.
Il existe donc une homotopie $(H_s)_{s\in[0,1]}$ telle que $H_0 = F_{x,t}$ et $H_1 = F^{KS}$ si F^{KS} est l'opérateur du triplet de Kasparov et Skandalis représentant l'élément gamma.

Pour tout $s \in [0,1]$, d'après l'étape précédente, H_s est homotope à un opérateur K_s auto-adjoint.
Or, F^{KS} est auto-adjoint, donc l'opérateur $K_1 = F^{KS}$ est homotope à K_0.
Les égalités montrées dans la deuxième étape restent valables dans $\mathscr{R}_1$, le triplet $(\mathscr{H}^{as}, \pi, K_0)$ est donc auto-adjoint et définit un module de Fredholm finiment sommable tel que défini dans la Définition 3.5.
Le triplet $(\mathscr{H}^{as}, \pi, F_{x,t})$ est donc équivalent à $(\mathscr{H}^{as}, \pi, K_0)$ qui est un module de Fredholm finiment sommable $\square$

Pour tout groupe hyperbolique finiment engendré, nous venons de prouver l'existence d'un module de Fredholm finiment sommable représentant l'élément gamma.
Notre objectif est donc atteint, nous avons démontré que :

Théorème principal : Soit (G,S) un groupe $\delta-$ hyperbolique engendré par le système fini symétrique S. Alors le triplet $(\mathscr{H}^{as}, \pi, \tilde{F}_{x,t})$ est un module de Fredholm pour $t >> 0$, qui est $p-$sommable et qui représente l'élément $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de Kasparov-Skandalis de G.

8 Bibliographie.

Références

[BCH] P. Baum, A. Connes, N. Higson, Classifying Space for Proper Actions and K-Theory of C^*-algebras.In C^*-algebras :1943-1993 (San Antonio, TX, 1993), volume 167 of Contemp. Math., pages 240-291. American Mathematical Society, Providence, RI, (1994)

[BFS] U. Bader, A. Furman, R. Sauer, Efficient subdivision in hyperbolic groups and applications, Groups, Geom. Dyn. 7 (2013), 263-292.

[BH] Martin R. Bridson André Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319. Springer-Verlag, Berlin, (1999)

[Bl] B. Blackadar, K-theory for operator algebras, second ed., Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, (1998)

[Co] A. Connes, Non-commutative differential geometry, Publ. Math. IHES 62, (1985), 41-144

[CM] A. Connes,H. Moscovici, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups", Topology 29(1990), 345-388

[De] A. Deitmar, Principles of Harmonic Analysis, Springer, (2009)

[Di] J. Dixmier, $\mathbb{C}^*-$ Algebras, Elsevier Science, (1977)

[Di2] J. Dixmier, Les $\mathbb{C}^*$-algèbres et leurs représentations. Gauthiers-Villars, (1964)

[EmNi] H. Emerson, B. Nica, K-homological finiteness and hyperbolic groups, Journal für die reine und angewandte Mathematik (2013)

[GhHa] E.Ghys,P.de la Harpe, Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Birkhäuser (1990)

[Grom] M. Gromov , Hyperbolic groups, Essays in group theory, MSRI Publ. 8, Springer (1987), 75-263

[HiKa] N.Higson, G.Kasparov, E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.*, 144(1), (2001), 23-74.

[HiRo] N. HIGSON, J. ROE Analytic K-Homology, Oxford University Press, (2000)

[JuVa] P.JULG, A.VALETTE, K-Theoretic Amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated Tree, Journal of Functional Analysis, (1984), 194-215

[Ka] G. KASPAROV, Equivariant KK-Theory and the Novikov Conjecture, Invent. Math. 91, (1988), 147-201

[Ka2] G. KASPAROV, The operator K-functor and extensions of C^{*-} algebras, Math.USSR Izv 16(1981), p. 513-572

[Ka3] G. KASPAROV, K-theory, group C^{*-} algebras, and higher signatures. In : Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), volume 226 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981, 101-146

[KS1] G. KASPAROV, G. SKANDALIS, Groupes boliques et conjecture de Novikov, *C.R.A.S,Paris*, Série I(319) :p.815-820, 1994.

[KS2] G. KASPAROV, G. SKANDALIS, Groups acting properly on bolic spaces and the Novikov conjecture, Ann. of Math. (2), 158(1), 2003, 165-206

[KT] K. TZANEV, C^*-algèbres de Hecke et K-théorie,*Thèse de doctorat de l'Université Paris 7*, 2000.

[Laf] V. LAFFORGUE, La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes hyperboliques, J. Noncommut. Geom. 6, (2012), 1-197.

[Laf2] V. LAFFORGUE, K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes, Invent. Math..149(1) 6, (2002), 1-95.

[Laf3] V. LAFFORGUE, Banach KK-Theory and the Baum-Connes Conjecture, European Congress of Mathematics Barcelona,Volume II, July 10-14, (2000), 31-45.

[Mi] I. MINEYEV Straightening and bounded cohomology of hyperbolic groups, Geom. funct. anal, Vol.11 (2001), 807-389

[MiYu] I. MINEYEV, G. YU, The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups, Invent. Math.149,(2002), 97-122

[MMS] I. MINEYEV, N. MONOD, Y.SHALOM, Ideal bicombings for hyperbolic groups and applications, Topology 43 (2004), 1-26

[Pu] M. Puschnigg, The Baum-Connes conjecture with coefficients for word-hyperbolic groups (after Vincent Lafforgue), Séminaire Bourbaki 2012/13, Astérisque 361 (2014)

[Pu2] M. Puschnigg, The Kadison-Kaplansky conjecture for word-hyperbolic groups, Inventiones mathematicae (2002)

[Pu3] M. Puschnigg, Finitely summable Fredholm modules over higher rank groups and lattices, J. K-Theory 8 (2011), no. 2, 223-239

[Si] I.M. SINGER, J.A THORPE, Lecture Notes on elementary topology and geometry, Scott, Foresman and Company (1967), 69-96.

[Tu] J-L Tu, Baum–Connes Conjecture and Discrete Group Actions on Trees, Kluwer Academic Publishers (1999), p 306.

[Wi] D.P. Williams, Crossed products of C^*- algebras, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, AMS, Providence, RI, (2007)

[WO] N.E Wegge-Olsen, K-Theorie and C^*-algebras, Oxford University Press, (1993).