Correction Exos fiche 2 et 3 du stage de maths fin août 2023

Fiche 2
Ex 6
Définition: Soient $f\in L(E)$ et G un sous-espace vectoriel de E. G est dit stable par f si et seulement si $f(G)\subset G$, si et seulement si pour tout $x\in G, f(x)\in G$

- Montrons que $Ker(f)$ est stable par g, c'est à dire pour tout $x\in ker(f), g(x)\in ker(f)$

Soit $x\in Ker(f)$: $f(g(x))=g(f(x))$ (car $fog=gof$)
$= g(0)$ (car $x\in ker(f)$)
$=$ 0 (car g est linéaire)
Donc $g(x)\in Ker(f)$. $Ker(f)$ est stable par g

- Montrons que Im (f) est stable par g c'est à dire pour tout $y\in Im(f)$, $g(y)\in Im(f)$

Soit $y\in Im(f)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$
$g(y)=g(f(x))=f(g(x))\in Im(f)$. $Im(f)$ est stable par g

Fiche 3
Ex 5

1. $Mat_B(B')=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ On échelonne par colonne
   $rg(B')=3=card(B')$ donc B' est libre . De plus $card(B')=dim(E)$ donc B' constitue une base de E
2. On trouve après calcul $f(e'_1)=e'_1$; $f(e'_2)=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=2e'_2$; $f(e'_3)=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}=3e'_3$

   Donc $D=Mat_{B'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$
3. $P=Mat_B(B')=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$
4. $D=P^{-1}AP$ donc $A=PDP^{-1}$
5. On montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $A^n=PD^nP^{-1}$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$ $D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}$ donc $A^n=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$

On trouve

$$A^n=\begin{pmatrix}3^n-2^n+1&1-2^n&3^n-2^{n+1}+1\\1-3^n&1&1-3^n\\2^n-1&2^n-1&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

Ex 6 (Fiche 3)

1. On montre que C est libre et comme $card(C)=dim(\mathbb{R}^3)$ C est donc une base de $\mathbb{R}^3$
2. On trouve après calcul $f(e'_1)=e'_1$; $f(e'_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=e'_2$; $f(e'_3)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=e'_1+e'_3$

   Donc $Mat_B'(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
3. On démontre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $Mat_B'(f^n)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

   D'après la formule de changement de bases on a

$$Mat_B'(f^n)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}n+1&n&-n\\0&1&0\\n&n&1-n\end{pmatrix}$$