Chap.35 : Développements limités

Dans tout ce qui suivra :

- I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ;
- a un réel de I ;
- f désignera une fonction définie sur I ou sur $I-\{a\}$;
- n un entier naturel.

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'approcher la fonction f par une fonction polynomiale$P$ au voisinage de a. C'est à dire que :

$$f(x) \approx P(x) \text{ sur un intervalle du type } [a-\delta; a+\delta] \text{ avec } \delta > 0.$$

L'erreur commise dans cette approximation s'appelle le **reste** :

$$R(x) = f(x) - P(x).$$

De manière générale, approcher f consiste à la remplacer par une fonction plus simple à manipuler, les fonctions polynomiales sont les candidates les plus naturelles.

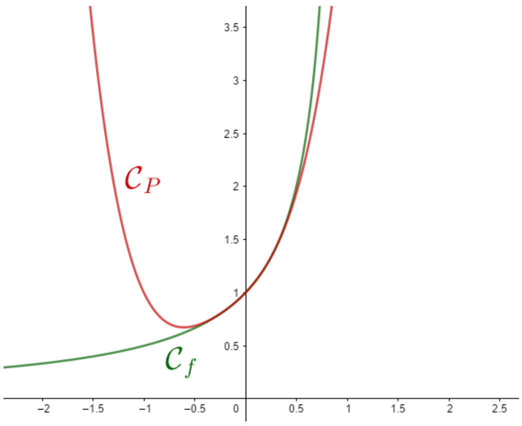
Exemple 1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ alors :*

$1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{1-x^5}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^5}{1-x}$.
$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\frac{x^5}{1-x}$

D'où : $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$ *car* $\frac{x^5}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.
Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x} \end{cases}$ *alors :*

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

si P est la fonction polynomiale $P(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4$.



2 Généralités

2.1 Définition, premiers développements limités

Définition 2.1. *On dit que f admet un **développement limité d'ordre n** en a lorsqu'il existe une fonction polynomiale P de degré n telle que l'on ait :*

$$f(a+h) = P(h) + R(h) \text{ avec } R(h) = \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

*La fonction polynomiale P est appelée **partie régulière** de développement limité.*
*$R(h)$ est appelé le **reste**, il est négligeable devant h^n.*
Nous noterons $\boldsymbol{DL_n(a)}$ pour "développement limité d'ordre n en a ".

Exemple 2.2. *Un $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est :*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Remarque 2.3. *$R(h) = \underset{h\to 0}{o}(h^n)$ signifie que $R(h)$ tend plus vite vers 0 que h^n.*
Or, plus n est grand, plus h^n tend vite vers 0. Un reste négligeable devant h^{n+1} est donc meilleur qu'un reste qui n'est négligeable que devant h^n au voisinage de 0.
Autrement dir, plus n est grand, meilleure sera l'approximation de $f(x)$ par $P(h)$ au voisinage de a.

Application 2.4. *Donner un $DL_2(1)$ ainsi qu'un $DL_1(1)$ de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.*

2.2 Dérivation et développements limités

Nous avons déjà eu l'occasion d'approximer localement une fonction dérivable en a par un polynôme de degré 1 :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

La formule suivante vient préciser et approfondir ce résultat :

Théorème 2.5. *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Proposition 2.6. ***DL au voisinage de 0 des fonctions de référence***
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

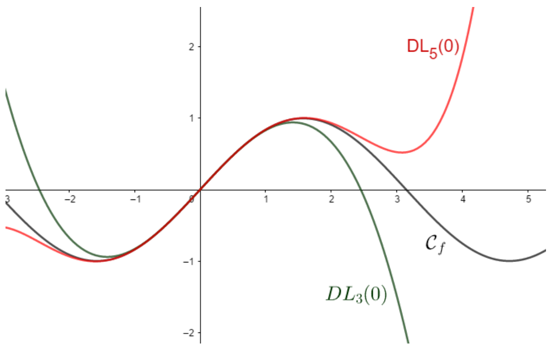
$cos(x)$
$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$

$sin(x)$
$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

Remarque 2.7. *Soit $f(x) = sin(x)$, voici les représentations graphiques des $DL_3(0)$ et $DL_5(0)$:*



Lorsque l'ordre du DL augmente, l'approximation locale est de meilleure qualité.

3 Propriétés des développements limités

3.1 Premières propriétés

Proposition 3.1. ***Unicité du développement limité.***
Si f admet un $DL_n(a)$ alors ce développement est unique.

Proposition 3.2. ***Troncature du développement limité.*** *Si f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ obtenu par troncature, c'est-à-dire en supprimant tous les termes dont le degré est supérieur ou égal à $p+1$.*

Proposition 3.3. ***Développement limité en 0 et parité.*** *Supposons que f admette un $DL_n(0)$ ayant pour partie régulière P :*

- *si f est paire alors P n'a que des monômes d'exposants pairs*
- *si f est impaire alors P n'a que des monômes d'exposants impairs*

Méthode 3.4. *Cette propriété permet de détecter d'éventuelles erreurs de calcul.*
En effet, si l'on trouve des monômes de degrés pairs dans le $DL_n(0)$ d'une fonction impaire, cela signifie que l'on s'est trompé quelque part.

3.2 Opérations usuelles sur les développements limités

Proposition 3.5. *Soient f et g qui admettent des $DL_n(a)$ ayant pour partie régulière P_f et P_g. Soit$\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f, f+g$ et $f \times g$ admettent des $DL_n(a)$ avec :*

- *la partie régulière du $DL_n(a)$ de λf est λP_f ;*
- *la partie régulière du $DL_n(a)$ de $f+g$ est $P_f + P_g$;*
- *la partie régulière du $DL_n(a)$ de $f \times g$ est la troncature de $P_f \times P_g$ au degré n, c'est-à-dire la fonction polynomiale obtenue en ne conservant que les monômes de degré inférieur ou égal à n dans le produit $P_f \times P_g$.*

Application 3.6.
1. *Donner un $DL_4(0)$ de $f(x) = 3sin(x) - 2e^x$.*
2. *Donner un $DL_4(0)$ de $f(x) = cos(x)sin(x)$.*
3. *Donner un $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{sin(x)}{1-x}$.*

Proposition 3.7. ***Composition.*** *Si f admet un $DL_n(0)$ et si g admet $DL_n(f(0))$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$.*
Si P_f et P_g sont les parties régulières des développements de f et g alors le $DL_n(0)$ de $g \circ f$ a pour partie régulière la troncature de $P_g \circ P_f$ au degré n.

Application 3.8. *Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-sin(x)}$.*

Méthode 3.9. *On peut utiliser la composition afin de déterminer le développement limité de l'inverse d'une fonction. En effet :*

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-(1-f(x))} = \frac{1}{1-u(x)} \text{ si } u(x) = 1 - f(x)$$

Si $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ alors on peut utiliser le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Lorsque ce n'est pas le cas, on peut également factoriser le dénominateur pour faire apparaitre une expression du type $1 - u$.

Application 3.10. *Déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{cos(x)}$.*

Application 3.11. *Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = tan(x)$.*

Méthode 3.12. *Afin de déterminer un DL_n d'une fraction :*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

Comme vu dans la méthode 3.9, on peut être amené à factoriser le dénominateur pour faire apparaitre une expression du type

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{x^p} \times \frac{1}{1-u(x)}.$$

Si le DL_n de $f(x)$ est factorisable par x^q, après simplification, les degré des parties régulières peuvent baisser.
Pour obtenir le DL_n d'un quotient on peut donc être amené à écrire des DL_m avec $m > n$ au numérateur et au dénominateur.

Application 3.13. *Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = \frac{x}{sin(x)}$.*

3.3 Développement limité d'une primitive, de la dérivée

Proposition 3.14. *Soit F une primitive de f.*
Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P_f alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ de partie régulière :

$$P_F(x) = F(0) + \int_0^x P_f(t)\mathrm{d}t$$

Application 3.15. *1. Donner un $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$.*

2. En déduire un $DL_{n+1}(0)$ de $ln(1+x)$.
Ce dernier DL est à connaître par cœur.

Proposition 3.16. *Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, alors f et f' admettent des $DL(a)$ d'ordres respectifs $n+1$ et n en a.*
De plus, le $DL_n(a)$ de f' s'obtient en dérivant terme à terme le $DL_{n+1}(a)$ de f.

4 Applications des développements limités

4.1 Calcul de limite, obtention d'équivalents

Proposition 4.1. *Soit f admettant un $DL_n(a)$:*

$$f(a+h) = b_k h^k + ... + b_n h^n + o(h^n) \text{ avec } 0 \leq k \leq n \text{ et } b_k \neq 0$$

Alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} (b_k h^k)$.

On a donc en particulier : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = b_k$.

Remarque 4.2. *Cette propriété notamment de déterminer le signe de $f(x)$ au voisinage de a. En effet, $f(a+h)$ est du signe de $b_k h^k$ lorsque h est dans un voisinage de* 0.

Application 4.3.

1. *Déterminer un équivalent de $ln(cos(x))$ au voisinage de* 0.
2. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{sin(x)} - e^x}{x^3}$.

4.2 Étude locale d'une fonction

Proposition 4.4. *Soit une fonction f définie en a.*

- *Si f admet un $DL_0(a)$: $f(a+h) = b_0 + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors f est continue en a et $f(a) = b_0$.*
- *Si f admet un $DL_1(a)$: $f(a+h) = b_0 + b_1 h + \underset{h\to 0}{o}(h)$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = b_1$.*

Proposition 4.5. *Soit une fonction f non définie en a mais qui admet un $DL_1(a)$:*

$$f(a+h) = b_0 + b_1 h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

alors :

- *f est prolongeable par continuité en a en une fonction $\tilde{f}$ en posant*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ b_0 \text{ si } x = a \end{cases}$$

- $\tilde{f}$ *est dérivable en a avec* $\tilde{f}'(a) = b_1$.

Méthode 4.6. *Si f admet un DL d'ordre au moins 2 en a :*

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_p(x-a)^p + \underset{x \to 0}{o}((x-a)^p)$$

alors $\mathscr{C}_f$ *admet la droite d'équation* $T_a : y = b_0 + b_1(x-a)$ *pour tangente au point d'abscisse a.*
De plus, les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ *et de* T_a *au voisinage de a sont déterminées par le signe de* $b_p(x-a)^p$.

Application 4.7. *Soit* $f(x) = \frac{cos(x) - e^x}{x}$ *définie sur* $\mathbb{R}^*$.

1. *Démontrer que f peut être prolongée par continuité en* 0 *par une fonction* $\tilde{f}$.
2. *Démontrer que le prolongement par continuité est dérivable en* 0.
3. *Déterminer une équation de la tangente* T_0 *à la courbe de* $\tilde{f}$ *en* 0.
4. *Étudier la position relative de* T_0 *par rapport à* $\mathscr{C}_f$ *au voisinage de* 0.

4.3 Étude au voisinage de l'infini

Définition 4.8. *Soit f une fonction définie sur un intervalle du type* $]A; +\infty[$.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ *est* ***asymptote*** *à* $\mathscr{C}_f$ *lorsque :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

Si $a \neq 0$, *on dit que l'asymptote est* ***oblique***, *sinon elle est* ***horizontale***.

Méthode 4.9. *Pour étudier le comportement asymptotique de f, on pose* $x = \frac{1}{h}$. *On ramène ainsi l'étude de* $+\infty$ *à* 0^+.
Cela permet :

- *de déterminer* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *;*
- *de trouver une asymptote à* $\mathscr{C}_f$ *en* $+\infty$.
- *de déterminer les positions relatives de* $\mathscr{C}_f$ *et de son asymptote au voisinage de* $+\infty$.

Application 4.10. *Faire l'étude asymptotique de* $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ *au voisinage de* $+\infty$.