Chap.4 : Déterminants

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Définition

Théorème 1.1. *Il existe une unique application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée **déterminant** et notée det, qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes (application n-linéaire) ;*
2. *l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 (application antisymétrique) ;*
3. *le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1 :*

$$\det(I_n) = 1.$$

Remarque 1.2.

- *Le déterminant de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté :* $\det(A)$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
- *Si on note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A on pourra aussi écrire :*

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

  On peut alors, par exemple, écrire la propriété de linéarité par rapport à la première colonne sous la forme :

$$\det(\lambda C_1 + \mu C_1', C_2, \dots, C_n)$$
$$= \lambda \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \mu \det(C_1', C_2, \dots, C_n)$$

  Et on peut procéder de même pour les autres colonnes.
- *Ce théorème-définition ne vous permet pas de calculer facilement de façon explicite le déterminant d'une matrice quelconque, les différentes techniques de calcul seront détaillées dans le chapitre suivant.*

1.2 Propriétés

Proposition 1.3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède deux colonnes identiques, alors* $\det(A) = 0$

Preuve :

Exemple 1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Proposition 1.5. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\operatorname{rg}(A) < n$, c'est-à-dire si les colonnes de A sont liées, alors $\det(A) = 0$.*

Preuve :

Proposition 1.6. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède une colonne nulle alors :*

$$\det(A) = 0$$

Proposition 1.7. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).A^T$ désigne la transposée de A. On a :*

$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$

Exemple 1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Remarque 1.9. *La transposition échange les colonnes en lignes et comme A et sa transposée ont le même déterminant, toutes les propriétés énoncées sur les colonnes peuvent être appliquées aux lignes.*

Proposition 1.10. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ *et* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *les colonnes de la matrice* A*. Alors :*

- $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_n)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Exemple 1.11. *1.* $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 10 & 12 & 12 \\ 12 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 24 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 16 \\ 2 & 8 & 18 \\ 2 & 12 & 20 \end{vmatrix} = 2^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix}$

ATTENTION ! ! ! $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$ et $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Théorème 1.12. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*.* A *est une matrice inversible si, et seulement si,* $\det(A) \neq 0$ *et on a alors :*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Méthode 1.13. *Ce théorème est l'un des plus importants du chapitre car il illustre la principale utilité du déterminant : savoir si une matrice est inversible !*

Proposition 1.14. *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *:*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$$

Proposition 1.15. *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. Si* A *et* B *sont deux matrices semblables, alors* $\det(A) = \det(B)$*.*

Preuve :

2 Calcul de déterminant

2.1 Dimension 2 ou 3

Théorème 2.1.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$ *(Règle de Sarrus)*

Méthode 2.2.
- *Voici un moyen mnémotechnique pour se souvenir de la règle de Sarrus :*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array} \end{array}$$

- *Attention la règle de Sarrus ne peut s'utiliser que pour les déterminants* 3×3!
- *Même si la règle de Sarrus parait très séduisante, ce ne sera pas toujours la plus astucieuse pour calculer un déterminant* 3×3. *En effet, dès que l'on aura un déterminant à paramètre, on préfèrera obtenir un résultat sous forme factorisée alors que la règle de Sarrus donne un résultat sous forme développée.*

Application 2.3. *Calculer* $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} x-3 & 2x & 2x \\ 2 & -x-1 & 2 \\ 4 & 4 & 1-x \end{vmatrix}$.

2.2 Matrices diagonales ou triangulaires

Proposition 2.4. *Soit A une matrice diagonale. Alors le déterminant de A est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

Application 2.5. *Calculer* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix}$.

Proposition 2.6. *Soit A une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Alors le déterminant de A est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

Application 2.7. *Calculer :*

1. $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 0 & -x & -x \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$ *2.* $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -5 \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{vmatrix}$ *3.* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

2.3 Opérations sur les colonnes ou les lignes, méthode du pivot

Théorème 2.8. ***Opérations autorisées***

- *Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes (ou à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes) ne change pas la valeur du déterminant. On notera ces opérations :*

$$C_i \leftarrow C_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k \text{ et } L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k.$$

- *Échanger deux lignes ou deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par* -1. *On notera ces opérations :*

$$L_i \leftrightarrow L_j \text{ ou } C_i \leftrightarrow C_j.$$

Méthode 2.9.

- *Ces opérations permettent de calculer la valeur de n'importe quel déterminant car, à l'aide de ces opérations, on peut transformer toute matrice en une matrice triangulaire (méthode du pivot vue en TSI 1).*
- *Contrairement à l'utilisation de la méthode du pivot en TSI 1, on ne cherchera pas à obtenir une matrice échelonnée réduite mais juste une matrice triangulaire car l'opération* $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *change la valeur du déterminant !*
- *les calculs pourront parfois être lourds et il ne faudra pas oublier les propriétés du déterminant énoncées dans la partie I 2) ainsi que l'utilisation de la technique présentée dans la partie suivante pour alléger les calculs.*

Application 2.10. *Calculer* $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Remarque 2.11. *Il est très important d'écrire à côté du calcul de déterminant les opérations effectuées sur les lignes ou les colonnes afin que n'importe qui puisse relire les calculs sans difficulté.*

Application 2.12. *Nous avions calculé* $\begin{vmatrix} x-3 & 2x & 2x \\ 2 & -x-1 & 2 \\ 4 & 4 & 1-x \end{vmatrix}$ *grâce à la règle de Sarrus et nous avions obtenu une forme développée du résultat. Reprendre les calculs en utilisant les opérations autorisées. Le résultat sera donné sous forme factorisée.*

Remarque 2.13. *On sera souvent amené à résoudre des équations du type* $\det(A(x)) = 0$. *On préfèrera donc obtenir un résultat de* $\det(A(x))$ *sous forme factorisée plutôt que développée. C'est pourquoi la règle de Sarrus est rarement utilisée pour les déterminants faisant intervenir un ou plusieurs paramètres.*

2.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème 2.14. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $A_{i,j}$ *la matrice obtenue en ôtant la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* A $(A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K}))$.

- *Développement par rapport à la* $i^{\text{ème}}$ *ligne* $(i \in [\![1;n]\!])$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \times \det(A_{i,j})$$

- *Développement par rapport à la* $j^{\text{ème}}$ *colonne* $(j \in [\![1;n]\!])$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \times \det(A_{i,j})$$

Application 2.15. *Calculer le déterminant suivant :* $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Méthode 2.16.
- *Développer par rapport à une ligne ou une colonne est particulièrement astucieux lorsqu'on dispose d'une ligne ou d'une colonne avec un seul coefficient non nul. Pour se ramener à cette situation on utilisera les opérations sur les lignes et les colonnes.*
- *Il ne faut jamais oublier les propriétés du déterminant : si deux lignes ou colonnes sont identiques alors le déterminant et nul ; si les lignes ou les colonnes sont liées alors le déterminant est nul ; si une ligne ou une colonne est nulle alors le déterminant est nul...*

Application 2.17. *Calculer* $\det(A)$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.5 Un exemple de calcul de déterminant d'ordre n

Application 2.18. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *calculer le déterminant d'ordre* n *:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

Dans toute cette partie E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

3.1.1 Définition

Définition 3.1. *Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.*
On note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ la matrice de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
*On appelle **déterminant** dans la base $\mathscr{B}$ de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, et on note $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.*

Remarque 3.2. *La $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ contient les coordonnées du vecteur $\vec{u}_i$ dans la base $\mathscr{B}$.*

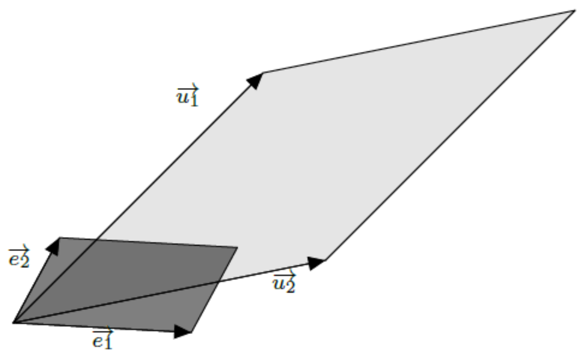
Application 3.3. *On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c$. On pose $Q_0 = (X-2)^2, Q_1 = 1 - X$ et $Q_2 = X^2$. Calculer $\det_{\mathscr{B}_c}(Q_0, Q_1, Q_2)$.*

Application 3.4. *On se place dans* $\mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $\mathscr{B}_c$ *et on considère aussi la base* $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *avec* $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (1,2,0)$ *et* $\vec{w} = (1,1,3)$.
On pose $\vec{a} = (0,1,-3), \vec{b} = (2,1,3)$ *et* $\vec{c} = (0,-2,0)$.
Calculer $\det_{\mathscr{B}_c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *et* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

3.1.2 Interprétation géométrique en dimension 2 et 3

En dimension 2 : Le déterminant de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est égal à l'aire algébrique du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$:

- l'unité d'aire étant l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$
- le signe étant déterminé par l'orientation relative de $\mathscr{B}$ et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.



Ici, $\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2) = -4$: l'aire du parallélogramme gris clair est égale à 4 fois l'aire du parallélogramme gris foncé et l'orientation de la famille (u_1, u_2) est contraire à celle de la base (e_1, e_2).

En dimension 3 : Le déterminant de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est égal au volume algébrique du parallélépipède de côtés $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$:

- l'unité de volume étant le volume du parallélépipède de côtés $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$
- le signe étant déterminé par l'orientation de la base $\mathscr{B}$.

3.1.3 Propriétés

Les propriétés suivantes découlent directement des propriétés sur les déterminants de matrice.

Proposition 3.5. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E :*

- *$\det_{\mathscr{B}}$ est un application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chacune de ses variables.*
- *La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est liée si, et seulement si,* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = 0$
- $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ *ne change pas de valeur si on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.*
- *Si on échange deux vecteurs la valeur du déterminant est multipliée par -1.*

Le déterminant est aussi un outil pour caractériser les bases d'un espace vectoriel :

Théorème 3.6. ***Caractérisation des bases**.*
Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *La famille* $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ *est une base de* E.
2. *Pour toute base* $\mathscr{B}$ *de* $E, \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$
3. *Il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$

Exemple 3.7. *Reprenons les deux exemples précédents :*

- *Comme* $\det_{\mathscr{B}}(Q_0, Q_1, Q_2) = 0$ *on peut affirmer que la famille* (Q_0, Q_1, Q_2) *n'est pas une base de* $\mathbb{R}_2[X]$
- *Comme* $\det_{\mathscr{B}_c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0 \left(\text{ ou } \det_{\mathscr{B}}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0 \right)$ *on peut affirmer que la famille* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3.8. *Soit* f *un endomorphisme de* $E, \mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* $E, A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *et* $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ *Alors :*

$$\det(A) = \det(A')$$

Preuve :

Le théorème précédent justifie la définition :

Définition 3.9. *Soit* f *un endomorphisme de* E. *On appelle* ***déterminant*** *de* f, *et on note* $\det(f)$, *le scalaire égal au déterminant de la matrice de* f *dans n'importe quelle base de* E.

Application 3.10. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *défini par* $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & b-d \\ c-d & a-c \end{pmatrix}$. *Calculer le déterminant de* f.

Méthode 3.11. *Contrairement au calcul du déterminant d'une famille de vecteur, le calcul du déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie. Un choix astucieux de la base pourra donc parfois réduire considérablement les calculs du déterminant.*

Proposition 3.12. *Soient f et g deux endomorphismes de E.*

$$\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$$

Exemple 3.13.

- *La matrice de l'application identité dans n'importe quelle base est égale à la matrice identité. Donc* $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
- *Si p est une projection vectorielle alors on a $p \circ p = p$.*
  Donc $\det(p)^2 = det(p)$ *et donc* $\det(p) = 0$ *ou* 1.
- *Si s est une symétrie vectorielle alors on a $s \circ s = \mathrm{id}_E$.*
  Donc $\det(s)^2 = 1$ *et donc* $\det(s) = 1$ *ou* -1.

Théorème 3.14. ***Caractérisation des automorphismes.***
Soit f un endomorphisme de E. f est un automorphisme de E si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$, *et on a alors :*

$$\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}.$$