Interrogation 4

Exercice 0.1. *On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

1. *Montrer que φ est un produit scalaire sur E.*
2. *Calculer $\left(X^2+1 \mid X^2+X+1\right)$ et $\left(X^2-3X \mid 2X-1\right)$.*

Exercice 0.2. *Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations :*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ est une base de G.*
2. *En déduire une base orthonormale de G.*
3. *Déterminer la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.*
4. *Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.*