Exercices
Chap.8 : Courbes paramétrées

1 Tracé de courbes

Exercice 1.1. *Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :*
$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sin(2t) \\ y(t)=\sin(3t) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.

Exercice 1.2. *On considère la courbe paramétrée définie par :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=2\cos(t)+\cos(2t) \\ y(t)=2\sin(t)-\sin(2t) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

1. *Réduire au maximum le domaine d'étude de la courbe.*
2. *Montrer que, pour tout* $t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{l} x'(t)=-4\sin(3t/2)\cos(t/2) \\ y'(t)=4\sin(3t/2)\sin(t/2) \end{array}\right.$.
   En déduire le tableau de variations des fonctions x *et* y *sur l'intervalle déterminé à la question* 1.
3. (a) *La courbe possède-t-elle un ou plusieurs points remarquables ? Si oui, donner la nature des tangentes en ce(s) point(s).*
   (b) *À l'aide d'un développement limité déterminer l'allure de la courbe au voisinage du point* $M(0)$.
   (c) *Déterminer un vecteur directeur de la tangente au point* $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. *On admet qu'au voisinage de ce point la courbe prend l'allure d'un point de rebroussement de première espèce.*
4. *Tracer l'allure de la courbe.*

Exercice 1.3. *Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :*

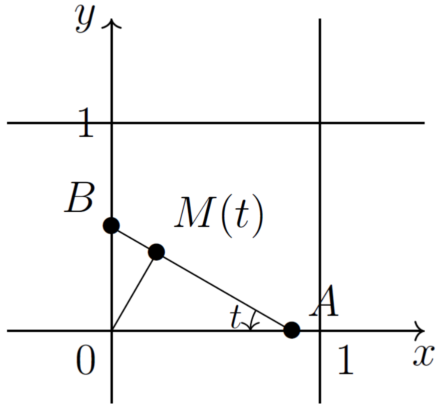
$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t-\sin(t) \\ y(t)=1-\cos(t) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

On étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage du ou des point(s) singulier(s).

Exercice 1.4. *Étudier et tracer l'allure de la courbe définie par le paramétrage :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t)=\frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{array}\right..$$

Exercice 1.5. *On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé du plan.*
On considère un point A de l'axe (Ox) et un point B de l'axe (Oy) tels que $AB = 1$.
On note alors M le projeté orthogonal de O sur le segment $[AB]$ et $\mathscr{T}$ le lieu des points M lorsque A et B se déplacent sur leur axe.



1. *On note t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, -\vec{\imath})$. Montrer que le point M a pour coordonnées :*

$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(t)\cos(t) \\ y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases}.$$

2. *Faire l'étude complète de la courbe $\mathscr{T}$ puis la tracer.*

2 Autour des tangentes

Exercice 2.1. *On reprend la courbe Γ étudiée dans le cours dont un paramétrage est* $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$.

1. *Pour $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, déterminer une équation cartésienne de la tangente D_t à Γ au point de paramètre t.*
2. *Déterminer, pour $t \neq 0$, les deux points d'intersection de D_t avec les axes de coordonnées, puis calculer la longueur du segment obtenu.*

Exercice 2.2. *On considère la courbe Γ définie par* $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
Déterminer et tracer sur votre calculatrice, l'ensemble Γ' des points du plan par lesquels passent deux tangentes à la courbe Γ perpendiculaires entre elles. (On l'appelle la courbe orthoptique de Γ.)

3 Longueur d'un arc paramétré

Exercice 3.1. *Calculer la longueur de la courbe de l'exercice* 1.2.

Exercice 3.2.

1. *Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^2(t)+\ln(\sin(t)) \\ y(t)=\sin(t)\cos(t) \end{array}\right., t\in\,]0;\pi[$$

   L'étude de la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage des points singuliers n'est pas demandée ici.
   On déterminera juste un vecteur directeur de la tangente aux points singuliers.

2. *Calculer la longueur de la courbe entre les deux points singuliers.*
   Après avoir simplifié le plus possible $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$, *il sera judicieux d'envisager le changement de variable* $u=\cos(t)$.

4 Un exemple dans l'espace

Exercice 4.1. *On considère la courbe de l'espace* Γ *définie par :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=(1+\cos(t))\cos(t) \\ y(t)=(1+\cos(t))\sin(t) \\ z(t)=4\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}\ .$$

1. *Quels sont les points réguliers de cette courbe ? En ces points, déterminer le vecteur tangent unitaire.*
2. *Montrer que la tangente à* Γ *en tous les points réguliers fait un angle constant avec l'axe* (Oz).
3. *Calculer la longueur de* Γ.