

Programme de khôlle 19

Semaine du 6 mars 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
1	1/12	0	1/12
2	2/12	1/12	1/12
3	3/12	2/12	1/12

- (a) Vérifier que l'on dispose bien d'une loi de probabilité.
 - (b) Déterminer les lois marginales de X et Y .
 - (c) Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
 - (d) Calculer $V[X]$ et $V[Y]$.
 - (e) Calculer $Cov(X, Y)$.
2. Soient deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	0,22	0,20	0,00	0,02
1	0,05	0,11	0,04	0,01
2	0,04	0,07	0,02	0,22

- (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
- (b) Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
- (c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 2$
- (d) Calculer $Cov(X, Y)$, puis le coefficient de corrélation.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 1)$.

Exercice 2.2. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la réflexion vectorielle par rapport au plan F d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 2.3. Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0 . Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \phi_x : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto y - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur E .

1. Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle.
2. Montrer que ϕ_x est une symétrie orthogonale (on précisera $\text{Ker}(\phi_x - \text{Id})$ et $\text{Ker}(\phi_x + \text{Id})$).

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

1 Isométries

- 1.1 Groupe orthogonal
- 1.2 Symétrie orthogonale
- 1.3 Matrices orthogonales
- 1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3

- 2.1 Orientation d'un espace vectoriel
- 2.2 En dimension 2
- 2.3 En dimension 3

3 Matrices symétriques

Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance

1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies

- 1.1 Loi d'un couple
- 1.2 Lois marginales
- 1.3 Loi conditionnelle
- 1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.

1.5 n variables aléatoires

2 Indépendance de V.A.R. finies

2.1 Deux variables

2.2 n variables

3 Somme et produit de deux V.A.R. finies

3.1 Espérance

3.2 Somme de lois de Bernoulli

3.3 Covariance