Devoir Surveillé 3 - CORRECTION

Durée : 2 heures 45
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *Dans tout cet exercice, α et β sont deux réels, et on pose pour tout entier $n \geqslant 2$,*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

On se propose d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ (c'est-à-dire si elle converge ou diverge) selon la valeur de α.

1. ***Supposons** $\alpha > 1$.*

   (a) *Soit $\gamma \in]1;\alpha[$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n$?*
   Pour tout $n \geqslant 2, n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\ln^\beta n}$.
   Vu que $\alpha - \gamma > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$ (c'est clair si $\beta \geqslant 0$, cela résulte des croissances comparées si $\beta < 0$).

   (b) *En déduire qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$, tel que $\left(n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq \frac{1}{n^\gamma}\right)$.*
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$, on a (par définition de la limite) :

   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |n^\gamma u_n| \leq \varepsilon$$

   En choisissant $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un entier n_0 (qu'on peut choisir supérieur ou égal à 2) tel que

   $$n \geq n_0 \Longrightarrow |n^\gamma u_n| \leq 1 \Longrightarrow u_n \leq \frac{1}{n^\gamma}.$$

   (c) *Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$?*

   La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge (puisque $\gamma > 1$), donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs (qui s'applique car $u_n \geq 0$), la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.

   (d) *Une application : donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.*

   On est dans le cas où $(\alpha;\beta) = (2;-1)$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge d'après la question précédente (puisque $\alpha > 1$).

(e) *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

On a $\sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$, *puisque* $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ *et* $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Vu que* $\frac{\ln n}{n^2} > 0$ *pour tout* $n \geq 2$, *on en déduit par le critère des équivalents que la série* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ *est de même nature que* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$, *donc la série* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ *converge.*

2. ***Supposons*** $\alpha < 1$.

(a) *Donner la limite de* nu_n.
Pour tout $n \geqslant 2$ *:*

$$nu_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}\ln^\beta n} = \frac{n^{|1-\alpha|}}{\ln^\beta n}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$ *(facile si* $\beta \leq 0$, *par croissance comparée si* $\beta > 0$*).*

(b) *En déduire qu'il existe un entier* $n_0 \geq 2$, *tel que* $\left(n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{1}{n}\right)$.
On sait que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *donc (par définition de la limite infinie) :*

$$\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow nu_n \geq A$$

En choisissant $A = 1$, *on obtient l'existence d'un entier* n_0 *tel que :*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow nu_n \geq 1 \Longrightarrow u_n \geq \frac{1}{n}$$

(c) *Quelle est la nature de la série* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *?*

Vu que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ *diverge, on en déduit par le critère de comparaison des séries à termes positifs que* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *diverge.*

(d) *Une application : donner la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

On est dans le cas où $(\alpha;\beta) = \left(\frac{1}{2};-1\right)$, *donc la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ *diverge d'après la question précédente (puisque* $\alpha < 1$ *).*

(e) *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}}$.

On a $\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{\sqrt{n}}$, *puisque :*

$$\begin{aligned}
&\ln\left(n^2+1\right) = \ln\left(n^2\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= 2\ln(n) + \ln\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)\\
&= 2\ln(n) + \tfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\tfrac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Vu que $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$ *pour tout* $n \geq 2$*, on en déduit par le critère des équivalents que la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}}$ *est de même nature que* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

En conclusion, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}}$ *est divergente*

3. ***Supposons*** $\alpha = 1$***.***
On va maintenant étudier le cas où $\alpha = 1$.
Pour cela, on fixe $\beta \in \mathbb{R}$ *et on considère la fonction* $f_\beta : [2;+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_\beta(x) = \tfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}.$$

(a) *Montrer qu'il existe un entier* $n_0 \geq 2$ *tel que* f_β *est décroissante sur* $[n_0, +\infty[$.
Pour $\beta \in \mathbb{R}$ *fixé, la fonction* $f_\beta : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ *est dérivable sur* $[2;+\infty[$*, et :*

$$\forall x \geq 2, f'_\beta(x) = -\frac{(\ln(x))^\beta + x\beta(\ln(x))^{\beta-1} \times \frac{1}{x}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} = -\frac{\beta+\ln(x)}{x^2(\ln(x))^{\beta+1}}.$$

Puisque $x^2(\ln(x))^{\beta+1} > 0$ *pour tout* $x \geq 2$*, on en déduit que la dérivée* f'_β *a le même signe que* $-(\ln(x)+\beta)$*, on a donc* $f'_\beta(x) \leq 0$ *pour* $x \geq e^{-\beta}$ *(et* $x \geq 2$*).*
En posant $n_0 = \max\left(2; e^{-\beta}\right)$*, on a donc* f_β *décroissante sur* $[n_0; +\infty[$.

(b) *Montrer que pour tout entier* $k \geq n_0 + 1$*, on a :*

$$\int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt.$$

Soit $k \geq n_0+1$*. La fonction* f_β *étant décroissante sur l'intervalle* $[k-1;k] \subset [n_0;+\infty[$ *(d'après la question précédente), on a*

$$\forall t \in [k-1,k], \quad f_\beta(k) \leq f_\beta(t) \leq f_\beta(k-1),$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} f_\beta(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(k-1)dt,$$

c'est-à-dire :

$$f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k-1).$$

En raisonnant de même sur l'intervalle $[k; k+1]$ *(où la fonction* f_β *est aussi décroissante), on obtient l'encadrement :*

$$\int_k^{k+1} f_\beta(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq \int_k^{k+1} f_\beta(k)dt,$$

c'est-à-dire :

$$f_\beta(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k).$$

En combinant les deux encadrements obtenus, on aboutit à :

$$\int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt$$

(c) *En déduire que pour tout entier* $n \geq n_0 + 1$*, on a*

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \int_{n_0}^{n} f_\beta(t)dt$$

Soit $n \geq n_0 + 1$*. En sommant les inégalités précédemment obtenues pour* k *allant de* $n_0 + 1$ *à* n*, on obtient par croissance de la somme :*

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt.$$

En utilisant la relation de Chasles avec ces intégrales, ceci se réécrit :

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \int_{n_0}^{n} f_\beta(t)dt$$

(d) *Déterminer une primitive de* f_β *sur l'intervalle* $[2; +\infty[$*. On distinguera les cas* $\beta = 1$ *et* $\beta \neq 1$*.*
En posant $u(t) = \ln(t)$*, on a :*

$$f_\beta(t) = \tfrac{1}{t}(\ln(t))^{-\beta} = u'(t)u^{-\beta}(t)$$

donc :

- *si* $\beta \neq 1$*, alors une primitive de* f_β *sur* $[2; +\infty[$ *est :*

$$F_\beta(t) = \frac{u^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1} = \frac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

- *si* $\beta = 1$, *alors* $f_\beta(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$, *donc une primitive de* f_β *sur* $[2;+\infty[$ *est :*

$$F_\beta(t) = \ln(u(t)) = \ln(\ln(t)).$$

(e) *En minorant les sommes partielles, conclure que la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *diverge lorsque* $\beta \leq 1$.
Supposons que $\beta \leq 1$. *D'après l'encadrement établi à la question 3c, on obtient la minoration :*

$$\forall n \geq n_0+1, \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \geq F_\beta(n+1) - F_\beta(n_0+1)$$

- *si* $\beta < 1$, *alors ceci se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \geq \frac{(\ln(n+1))^{-\beta+1} - (\ln(n_0+1))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

Puisque $-\beta+1 > 0$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n+1))^{-\beta+1} - (\ln(n_0+1))^{-\beta+1}}{-\beta+1} = +\infty$$

donc par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} = +\infty$.

Ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *diverge.*

- *si* $\beta = 1$, *alors ceci se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n_0+1)),$$

donc la conclusion est identique :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$$

donc la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ *diverge .*

(f) *Montrer enfin que la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *converge lorsque* $\beta > 1$.

Supposons que $\beta > 1$.
D'après l'encadrement établi à la question 3c, on obtient la majoration :

$$\forall n \geq n_0+1, \quad \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq F_\beta(n) - F_\beta(n_0),$$

ce qui se récrit :

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^{\beta}} \leq \frac{(\ln(n))^{-\beta+1} - (\ln(n_0))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

Puisque $-\beta+1<0$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^{-\beta+1}-(\ln(n_0))^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \frac{(\ln(n_0))^{-\beta+1}}{\beta-1}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^{\beta}}$ *est majorée par une suite convergente, donc elle est elle même majorée. Vu que* (S_n) *est croissante (le terme général de la série étant positif), on en déduit que la suite* (S_n) *est convergente, donc la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}$ *converge .*

Exercice 0.2. ***Étude d'une famille de matrices.***

Soit $a \in \mathbb{R}$. *On définit la matrice :*

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(2a+2) \end{pmatrix}$$

1. (a) *Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice* M_a *est-elle inversible ?*
   $\det(M_a) = -2a^2$ *et* M_a *inversible ssi* $\det(M_a) \neq 0$ *i.e.* $a \neq 0$.
   Donc M_a *est inversible ssi* $a \neq 0$.

   (b) *Déterminer le rang de* M_a *lorsque* M_a *n'est pas inversible.*
   Si $a=0$, *on a :*

$$M_a = M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   La première colonne est nulle et les deux dernières forment une famille libre donc $\mathrm{rg}(M_0) = 2$.

2. (a) *Montrer que* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* M_a *associé à une valeur propre* λ *que l'on précisera.*
   Le vecteur u_1 *est non nul et vérifie :*

$$M_a u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -2u_1.$$

Donc u_1 est un vecteur propre de M_a associé à la valeur propre $\lambda = -2$.

(b) *Déterminer le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ.*
Pour calculer $E_{-2} = \mathrm{Ker}\,(M_a + 2I_3)$, examinons la matrice :

$$M_a + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -2a \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{rg}\,(M_a + 2I_3) \geq 2$ (puisque deux premières lignes forment une famille libre) donc par le théorème du rang :

$$\dim(E_{-2}) = 3 - \mathrm{rg}\,(M_a + 2I_3) \leq 1.$$

Or, un sous-espace propre n'est jamais nul (par définition d'une valeur propre), donc $\dim(E_{-2}) = 1$.
Puisqu'on sait par ailleurs que $u_1 \in E_{-2}\backslash\{0\}$, on en déduit que :

$$E_{-2} = \mathrm{Vect}\,(u_1).$$

3. (a) *Calculer le polynôme caractéristique de M_a, noté χ_{M_a}. On pourra pour l'instant le laisser sous forme développée.*
On a :

$$\chi_{M_a}(X) = \det(XI_3 - M_a) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2a^2 & (4a+a^2) & X+(2a+2) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient :

$$\chi_{M_a}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 2a^2 & 4a+a^2 \end{vmatrix} + (X+2a+2)\begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix}$$
$$= X^3 + (2a+2)X^2 + (4a+a^2)\,X + 2a^2.$$

(b) *Montrer que $-a$ est une valeur propre multiple de M_a (c'est-à-dire de multiplicité supérieure ou égale à 2 et factoriser χ_{M_a} le plus possible si cela n'a pas été fait à la question précédente.*
Le réel $-a$ est racine double de M_a, car

$$\chi_{M_a}(-a) = -a^3 + (2a+2)a^2 - \left(4a+a^2\right)a + 2a^2 = 0,$$
$$\chi'_{M_a}(-a) = 3a^2 - 2a(2a+2) + \left(4a+a^2\right) = 0.$$

Donc $\chi_{M_a}(X)$ est divisible par $(X+a)^2$: il existe un réel γ tel que

$$\chi_{M_a}(X) = (X+a)^2(X+\gamma),$$

et par identification du coefficient de degré 0 dans la forme développée, on obtient $\gamma = 2$, donc :

$$\chi_{M_a}(X) = (X+a)^2(X+2).$$

(c) *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}, M_a$ n'est pas diagonalisable. On distinguera les cas $a = 2$ et $a \neq 2$.*

- *Si $a = 2$, alors $\chi_{M_a}(X) = (X+2)^3$, alors $\mathrm{Sp}\,(M_a) = \{-2\}$, et l'unique sous-espace propre E_{-2} est de dimension 1 (d'après la question 2.(b)), cette dimension est donc strictement inférieure à la multiplicité (3) de la valeur propre.*
  On en déduit que M_a n'est pas diagonalisable.
- *Si $a \neq 2$, alors $\mathrm{Sp}\,(M_a) = \{-2, -a\}$, dans ce cas M_a est diagonalisable ssi $\dim(E_{-a}) = 2$.*

$$M_a + aI_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(a+2) \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes de $M_a + aI_3$ forment une famille libre donc $\mathrm{rg}\,(M_a + aI_3) \geq 2$ et ainsi, $\dim(E_{-a}) \leq 1$.
Comme $-a$ est valeur propre, on a aussi $E_{-a} \neq \{0\}$.
On en déduit que $\dim(E_{-a}) = 1 \neq 2$, donc M_a n'est pas diagonalisable.

4. ***Étude du cas particulier** $a = 0$.*

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère le plan $\mathscr{Q}$ d'équation cartésienne $2y + z = 0$.

(a) *On rappelle que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et on pose $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.*
Montrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathscr{Q}$.
Les vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires (car non nuls et non proportionnels) et ils appartiennent tous deux au plan $\mathscr{Q}$ (puisque leurs coordonnées vérifient l'équation cartésienne $2y + z = 0$).
Donc la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathscr{Q}$ (puisqu'elle est libre et de cardinal $2 = \dim(\mathscr{Q})$).

(b) *Montrer que $\mathscr{Q}$ est stable par g.*
On a $g(u_1) = -2u_1$ (d'après 2.(a)) et $g(u_2) = 0$ (la première colonne de M_0 étant nulle), donc pour tout vecteur $u = \alpha u_1 + \beta u_2 \in \mathscr{Q}$, on en déduit par linéarité :

$$g(u) = \alpha g(u_1) + \beta g(u_2) = -2\alpha u_1 \in \mathscr{Q},$$

ce qui montre que $\mathscr{Q}$ est stable par g.

On note h la restriction de g au sous-espace $\mathscr{Q}$, c'est-à-dire que :

$$h : \mathscr{Q} \to \mathscr{Q} \text{ et } \forall u \in \mathscr{Q}, h(u) = g(u).$$

(c) *Déterminer la matrice de h dans la base (u_1, u_2).*
Puisque :

- $h(u_1) = g(u_1) = -2u_1 = -2u_1 + 0u_2$
- $h(u_2) = g(u_2) = 0 = 0u_1 + 0u_2$

la matrice de h dans la base (u_1, u_2) est :

$$D = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}(h) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) *L'endomorphisme h est-il diagonalisable ? Et l'endomorphisme g ?*
On a trouvé une base de $\mathscr{Q}$ dans laquelle h a une matrice diagonale, donc h est diagonalisable.
En revanche, g n'est pas diagonalisable puisque sa matrice dans la base canonique M_0 ne l'est pas (d'après Q3c).

5. ***Étude du cas particulier** $a = 2$.*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $\varepsilon_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) *Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.*
On cherche $\varepsilon_2 = (x, y, z)$ tel que $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ i.e.

$$\begin{cases} y & = -2x + 1 \\ z & = -2y - 2 \\ -8x - 12y - 6z & = -2z + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y + z & = -1 \\ 2x + y & = 1 \\ 2y + z & = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y + z & = -1 \\ -2y - z & = 2 \\ 2y + z & = -2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y + z & = -1 \\ 2y + z & = -2 \end{cases}$$

On trouve finalement (en prenant $z = 0$) $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$.

(b) *Montrer qu'il existe un vecteur* ε_3 *de* $\mathbb{R}^3$ *tel que la famille* $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *soit une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* f *est* $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On cherche $\varepsilon_3 = (x, y, z)$ *tel que* $f(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$ *(vu la matrice voulue) i.e.*

$$\left\{\begin{array}{rl} y & = -2x+1 \\ z & = -2y-1 \\ -8x-12y-6z & = -2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z & = & 0 \\ 2x+y & = & 1 \\ 2y+z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+3y+z & = 0 \\ -2y-z & = 1 \\ 2y+z & = -1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

On peut finalement choisir (en posant $y = 0$*) :*

$$\varepsilon_3 = (1/2, 0, -1)$$

Par construction, la matrice de f *dans la base* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est la matrice* T *puisqu'on a :*

$$f(\varepsilon_1) = -2\varepsilon_1, \quad f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1, \quad f(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_3 + \varepsilon_2.$$