# Devoir Surveillé 2 - CORRECTION

***Durée : 3 heures***
***Calculatrice interdite***

**Exercice 1**
On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\sigma$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A$.

1. Exprimer $\sigma(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$ (les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ pourront être notés en colonne).
2. Calculer $A^2$. Que peut-on en déduire concernant $\sigma$ ?
3. Déterminer les éléments caractéristiques de $\sigma$ (en donner des bases).

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(g_1) \quad \text{où} \quad g_1 = (1, 2, 0, -1).$$

On appelle $s$ la symétrie vectorielle par rapport à $G$ parallèlement à $H$.

4. Déterminer une base $\mathscr{B} = (h_1, \dots, h_p)$ de $H$. Que vaut $p$ ?
5. Démontrer que la famille $\mathscr{E} = (h_1, \dots, h_p, g_1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Qu'en déduire concernant $H$ et $G$ ?
6. Donner $B' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(s)$. En déduire la matrice $B$ de $s$ relativement à la base canonique $\varepsilon$.
7. Montrer que $s + \sigma = 0$.

**Exercice 2** On définit l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y, x + y + 2z)$.
On notera $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $I_3$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On rappelle au candidat que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pourront être indifféremment notés en ligne ou en colonne.
Les **Parties B** et **C** peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre, mais elles utilisent toutes les deux les résultats de la **Partie A**.

**Partie A.** *Premières propriétés de $f$.*

A1. Justifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

A2. (a) Citer le théorème du rang dans un cadre général.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ puis en déduire $\mathrm{rg}\, f$. L'application $f$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ ?

A3. Donner la matrice $M$ de $f$ relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ en justifiant brièvement. Quel est son rang ? Est-elle inversible ?

On définit les ensembles $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 3u\}$.

A4. Réécrire $F$ et $G$ comme des noyaux d'applications linéaires convenables. Que peut-on en déduire sur la structure de $F$ et $G$ ?

A5. (a) Trouver une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F$ puis donner sa dimension.
(b) Trouver une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $G$ puis donner sa dimension.

A6. On note $\mathscr{E}$ la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Justifier que $\mathscr{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

A7. Donner la matrice $M'$ de $f$ relativement à la base $\mathscr{E}$.

A8. Quelle égalité matricielle relie les matrices $M$ et $M'$ ? *Justifier soigneusement.*

**Partie B.** *Un projecteur et une symétrie.*

B1. Énoncer trois caractérisations différentes permettant de montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

B2. Justifier que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $q$ la projection sur $G$ parallèlement à $F$ et $\sigma$ la symétrie par rapport à $G$ parallèlement à $F$.

B3. Déterminer l'expression de $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

B4. Même question pour $\sigma(x, y, z)$.

**Partie C.** *Calcul des puissances de $M$.*

C1. Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $M^2 = aM + bI_3$.

C2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$ où les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ vérifient les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -3\alpha_n. \end{cases}$$

Que valent $\alpha_i$ et $\beta_i$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$ ?

C3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_{n+2} - 4\alpha_{n+1} + 3\alpha_n = 0$.

C4. Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n = \tfrac{1}{2}(3^n - 1)$$

et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = -3\alpha_{n-1} = \tfrac{3}{2}(1 - 3^{n-1}).$$

C5. Conclure en explicitant $M^n$.
*On attend une matrice $3 \times 3$ dont les coefficients dépendront de $n$.*