Pour le 3 janvier 2023
Devoir-Maison 6

Exercice 0.1. *On considère le système différentiel :*

$$(S) : \begin{cases} x' = 2x - z + 2 \\ y' = 2x - y - 2z + 4t \\ z' = x + y \end{cases}$$

1. *Écrire le système* (S) *sous la forme* $X' = AX + b(t)$ *avec :*

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

2. *Résolution du système homogène* $(H) : X' = AX$.
   (a) *Diagonaliser* A *dans* $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ *puis déterminer les solutions* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ *du système homogène* (H).
   (b) *En déduire les solutions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *de* (H).
3. *Montrer que le système* (S) *possède une solution dont les composantes sont des fonctions affines.*
   On notera X_p *cette solution particulière.*
4. (a) *Montrer que* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *est solution de* (S) *si et seulement si* $X - X_p$ *est solution de* (H).
   (b) *En déduire les solutions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *de* (S).

Exercice 0.2. *On considère l'équation différentielle :*

$$(E) : (1 + x)y'' - 2y' + (1 - x)y = xe^x$$

et on note (H) *l'équation homogène associée.*

1. *Y a-t-il des solutions de* (H) *de la forme* $x \mapsto e^{\lambda x}$ *?*
2. *Résoudre* (E) *sur* $I =]-1; +\infty[$.

   Indication : *on pourra utiliser la méthode d'abaissement d'ordre étudiée en cours et en TD.*