Chap.23 : Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1 Notations

Dans la suite, n désignera un entier naturel non nul.
Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ est l'ensemble des $n-$ uplets de réels, que l'on appellera **vecteurs** et que l'on notera avec une flèche :

$$\overrightarrow{u} = (u_1; ...; u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$(0; ...; 0) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur nul et est noté $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.
On dispose sur $\mathbb{R}^n$ de deux opérations sur les vecteurs :

- l'addition de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1; ...; u_n) + (v_1; ...; v_n) = (u_1 + v_1; ...; u_n + v_n)$$

- la multiplication d'un vecteur par un scalaire :

$$\lambda\overrightarrow{u} = \lambda(u_1; ...; u_n) = (\lambda u_1; ...; \lambda u_n)$$

Remarque 1.1.
- *Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on peut identifier les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs du plan ou de l'espace.*
- *Attention à ne pas confondre une famille $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (u_1; ...; u_n) \in \mathbb{R}^n$.*

2 Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 2.1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

- *Une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ est un vecteur de la forme :*

$$\lambda_1\overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p\overrightarrow{u}_p \text{ avec } \lambda_1, ..., \lambda_p \text{ des scalaires.}$$

  *Les scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.*

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$ est notée $Vect(\mathscr{F})$:*

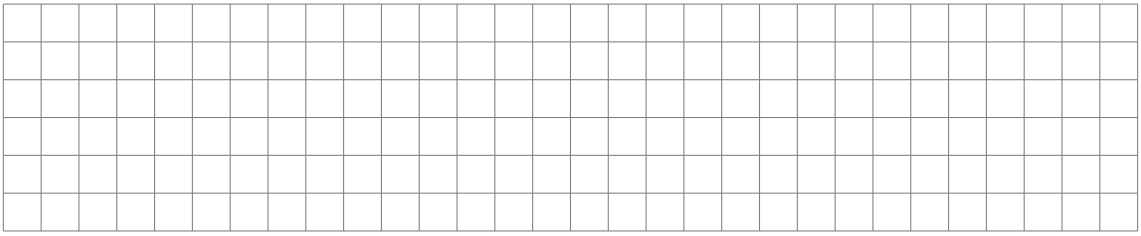
$$Vect(\mathscr{F}) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda k \overrightarrow{u}_k, (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

Méthode 2.2. *Pour vérifier qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré par une famille :*

$$\overrightarrow{u} \in Vect(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p) \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p \overrightarrow{u}_p$$

Application 2.3. *Soit* $\overrightarrow{u} = (-2; 1; -4; 7) \in \mathbb{R}^4$*, a-t-on*

$$\overrightarrow{u} \in Vect((2; 2; 1; 2), (1; 0; 1; 1), (1; 1; 1; 2)) \text{ ?}$$

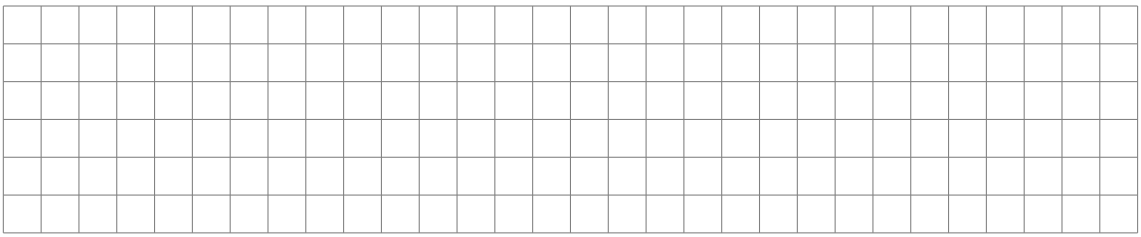


Application 2.4. *On considère le sous-ensemble* F *de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$$

1. *Le vecteur* $(-1; -1; 1)$ *appartient-il à* F *?*
2. *Montrer que* $F = Vect((1; 2; 0), (0; 1; 1))$*.*
3. *Déterminer deux scalaires* λ_1 *et* λ_2 *tels que :*

$$(-1; -1; 1) = \lambda_1(1; 2; 0) + \lambda_2(0; 1; 1)$$



Application 2.5. *Soient* $\overrightarrow{u} = (1; 2; 0)$ *et* $\overrightarrow{v} = (3; 1; 0)$*.*
On note $F = \{(x; y; 0), (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$*.*
Démontrer que :

$$Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = F$$

2.2 Familles libres et liées

Définition 2.6. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

- *On dit que la famille $\mathscr{F}$ est libre lorsque la seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs est celle dont tous les coefficients sont nuls :*

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p \overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0} \Rightarrow \forall i \in [\![1; p]\!], \lambda_i = 0$$

- *Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.*

Méthode 2.7. *Pour savoir si la famille $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ou liée :*

1. *On résout l'équation*

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p \overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}$$

   d'inconnue $(\lambda_1; ...; \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

2. *Cette équation est équivalente à un système de n équations à p inconnues qui est compatible :*
   - *si la seule solution est $(0; ...; 0)$ alors $\mathscr{F}$ est libre ;*
   - *sinon $\mathscr{F}$ est liée.*

Application 2.8. *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-3; 1; 0; 2)$, $\overrightarrow{v} = (1; 1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{w} = (1; 1; 1; 1)$. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est-elle libre ou liée ?*

Proposition 2.9. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*
Soit A la matrice de taille (n, p) dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$.
Il y a équivalence entre :

- *La famille $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ est libre.*
- *Le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale $(0; ...; 0) \in \mathbb{R}^p$.*
- *Le nombre de pivot de A est p.*
- *$rg(A) = p$*

Application 2.10. *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (2; 0; 2; 0)$, $\overrightarrow{u}_3 = (-1; -1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{u}_4 = (0; 0; 1; 0)$. En utilisant la propriété précédente, déterminer si la famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$ est libre ou liée ?*

2.3 Familles génératrices de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.11. *Soit $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*
On dit que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$ lorsque $Vect(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p) = \mathbb{R}^n$. Cela est équivalent à :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p \overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{u}$$

Application 2.12. *Soient $\overrightarrow{u}_1 = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1; -1; 1)$, $\overrightarrow{u}_3 = (-2; 2; 2)$ et $\overrightarrow{u}_4 = (-1; 1; -1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note $\overrightarrow{w} = (1; -2; 2)$.*

1. *Déterminer un quadruplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :*

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{u}_3 + \lambda_4 \overrightarrow{u}_4 = \overrightarrow{w}$$

2. *La famille $\mathscr{F}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Justifier.*

Théorème 2.13. *Soit $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, A la matrice de taille (n, p) dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$.*
Il y a équivalence entre :

- *La famille $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.*
- *Pour toute matrice colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ est compatible.*
- *$rg(A) = n$*

Application 2.14. *1. Prouver que la famille $((1;1;1),(1;2;3),(1;4;9))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.*

2. Exprimer $\overrightarrow{u} = (2;4;1)$ dans cette famille.