Exercices
Chap.2 : Applications linéaires

Exercice 0.1. 1. *Soit f l'application de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \end{pmatrix}$. Montrer que f est une application linéaire puis déterminer une base du noyau et de l'image de f.*

2. *Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de E, puis déterminer une base de leur noyau et de leur image.*
   (a) *f est définie sur $E = \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (2x - y, 3x + y)$.*
   (b) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixés. f est définie sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $f(M) = AM - MA$.*
   Pour le noyau et l'image on prendra $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (c) *f est définie sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + P$.*
   (d) *f est définie sur $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :*
   $$f(M) = M + (b + c)I_2, \text{ où } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.2. *Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques des espaces considérés :*

1. *$f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2\right)$ définie par :*
$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = \left(2x_1 - 4x_3 + 5x_5, -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_5\right)$$
2. *$f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ définie par $f(P) = (X - 1)P' + P$*
3. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On considère $f \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right)$ définie par :*
$$f(M) = AM.$$
On cherchera la matrice de f dans la base $\left(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\right)$

Exercice 0.3. *Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par :*
$$f\left(e_1\right) = 2e_2 + 3e_3 \quad f\left(e_2\right) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \quad f\left(e_3\right) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

1. *Justifier l'existence et l'unicité de f.*

2. *Construire sa matrice représentative dans la base canonique.*
3. (a) *Sans expliciter* $\ker(f - id_E)$, *montrer que* $\ker(f - id_E)$ *est stable par* f.
   (b) *Déterminer* $\ker(f - id_E)$ *et en donner une base.*
4. (a) *Sans expliciter* $\ker\left(f^2 + id_E\right)$, *montrer que* $\ker\left(f^2 + id_E\right)$ *est stable par* f.
   (b) *Déterminer* $\ker\left(f^2 + id_E\right)$ *et en donner une base.*
5. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = \ker(f - id_E) \oplus \ker\left(f^2 + id_E\right)$.
6. *Déterminer la matrice représentative de* f *dans une base adaptée à la somme directe précédente.*

Exercice 0.4. *Soient* $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\right\}$ *et* $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y = z\right\}$.

1. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
2. *Soit* p *la projection sur* E *parallèlement à* F.
   Déterminer la matrice de p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Soit* s *la symétrie par rapport à* E *parallèlement à* F.
   Déterminer la matrice de s *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 0.5. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que f *est une symétrie vectorielle et déterminer ses caractéristiques géométriques.*