Chap.33 : Dérivabilité

Dans tout ce qui suivra :

- I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point
- $x_0 \in I$
- f désignera une fonction $f : I \to \mathbb{R}$
- $\mathscr{C}_f$ désignera la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1 Nombre dérivée, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en un point

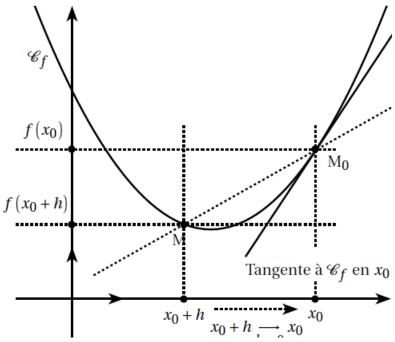
Définition 1.1.

- *Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$. Alors $\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est appelé le* ***taux d'accroissement*** *de f entre x_0 et $x_0 + h$.*
- *On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \tau_{x_0}(h)$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le* ***nombre dérivé*** *de f en x_0, elle est notée* $\boldsymbol{f'(x_0)}$ *:*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Remarque 1.2.

- *Le taux d'accroissement et sa limite éventuelle peuvent s'interpréter graphiquement.*
Soient les points $M_0(x_0; f(x_0))$ et $M((x_0 + h; f(x_0 + h))$: ces deux points appartiennent à $\mathscr{C}_f$, la droite (MM_0) est appelée une ***sécante*** *de $\mathscr{C}_f$.*
$\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est le coefficient directeur de (MM_0).
S'il existe, $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0. Cette tangente peut être vue comme une limite de droites sécantes passant toutes par M_0.



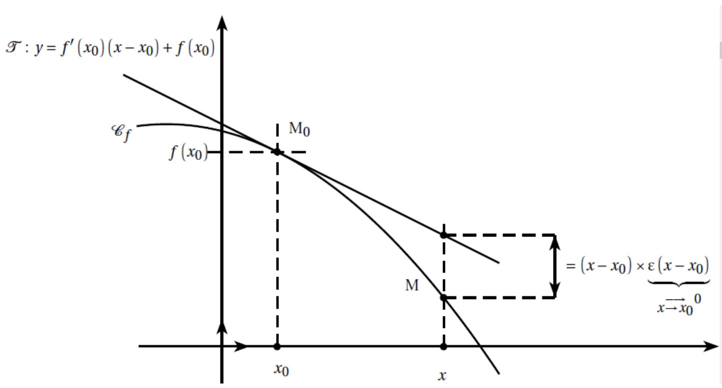
- *Le taux d'accroissement et sa limite peuvent aussi s'interpréter d'un point de vue cinématique : si f représente la position d'un mobile au cours du temps, alors le taux d'accroissement $\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est la* ***vitesse moyenne*** *entre les instants x_0 et x_0+h. S'il existe, le nombre dérivé $f'(x_0)$ est la* ***vitesse instantanée*** *à l'instant x_0.*

Proposition 1.3.

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$, un voisinage $V \in \mathscr{V}(O)$ et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ avec :*

$$\forall h \in V, f(x_0+h) = f(x_0) + \ell \times h + h \times \varepsilon(h)$$

On a alors $\ell = f'(x_0)$.
On dit alors que l'égalité $f(x_0+h) = f(x_0) + \ell \times h + h \times \varepsilon(h)$ est le ***développement limité*** *en x_0 à l'ordre 1 de f .*



- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Remarque 1.4. *La contraposée du dernier point s'écrit :*

si f n'est pas continue en x_0 alors n'est pas dérivable en x_0.

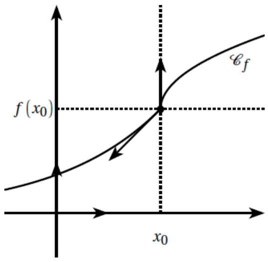
il sera donc inutile de s'intéresser en la dérivabilité en x_0 d'une fonction qui n'est pas continue en x_0.

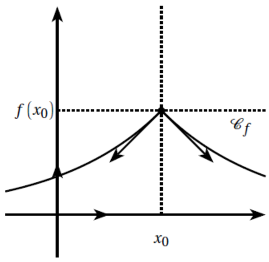
Application 1.5. *Soit $f : \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$.*
Démontrer que f est continue mais non dérivable en 0.

1.2 Dérivabilité à droite et à gauche en x_0

Définition 1.6. *On dit que f est dérivable en x_0 à droite lorsque $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*
Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\boldsymbol{f'_d(x_0)}$.
On définit de même $\boldsymbol{f'_g(x_0)}$ pour la dérivabilité à gauche.

Remarque 1.7. *On obtient parfois des valeurs différentes pour $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$.*





Application 1.8. *Déterminer la dérivabilité en 0 de* $f : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mid x \mid \end{cases}$

Définition 1.9. *Lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ alors la fonction f n'est pas dérivable en x_0. On dit alors que $\mathscr{C}_f$ présente en x_0 une **tangente verticale**.*
*Lorsque cela est le cas pour l'étude de la dérivabilité à gauche ou à droite, on parle de **demi-tangente verticale à gauche ou à droite**.*

Proposition 1.10.
- *Lorsque x_0 est l'extrémité supérieure de I ,f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0 à gauche.*
- *Lorsque x_0 est l'extrémité inférieure de I ,f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0 à droite.*
- *Lorsque x_0 n'est pas une extrémité de I ,f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0 à gauche et à droite et si :*

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Application 1.11. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1.3 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.12. *On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout $a \in I$.*
Lorsque f est définie sur I et dérivable sur $J \subset I$, on appelle ***fonction dérivée*** *la fonction notée f' (ou $\frac{df}{dx}$) définie sur J qui à tout $x \in J$ associe son nombre dérivé :*

$$f' : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

Application 1.13. *Démontrer que la fonction dérivée de la fonction racine carrée est la fonction* $f' : \begin{cases}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Opérations sur les fonctions dérivables en a

Théorème 2.1. *Toutes les fonctions de référence sont dérivables en tout point x_0 où elles sont définies à l'exception :*

- *les racines n-èmes, pour $n \geq 2$ qui sont dérivables en $x_0 \neq 0$;*
- *les fonctions $\arcsin$ et $\arccos$ dérivables en $x_0 \in]-1; 1[$;*

- *la fonction valeur absolue dérivable en* $x_0 \neq 0$ *;*
- *la fonction partie entière dérivable en* $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$*.*

Théorème 2.2. *Soient* f *et* g *dérivables en* x_0 *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

- $f+g$, λf *et* fg *sont dérivables en* x_0 *avec :*
    - $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
    - $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \times f'(x_0)$
    - $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- *si* $g'(x_0) \neq 0$ *alors* $\frac{1}{f}$ *et* $\frac{f}{g}$ *sont dérivables en* x_0 *avec :*
    - $(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
    - $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Théorème 2.3. ***Dérivée d'une composée.***
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(I) \subset J$*.*
Soit $x_0 \in I$*, si* f *est dérivable en* x_0 *et si* g *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *avec :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Théorème 2.4. ***Dérivée de la fonction réciproque.***
Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *strictement monotone sur* I*. Alors :*

- f *est bijective de* I *sur* $J = f(I)$ *;*
- f^{-1} *est strictement monotone sur* J *(et de même sens de variation que* f*) et continue sur* $f(I)$ *:* $f^{-1} \in \mathscr{C}(f(I), I)$ *;*
- *Soit* $x_0 \in J$*. Si* f *est dérivable en* $t_0 = f^{-1}(x_0)$ *et si* $f'(t_0) \neq 0$ *alors* f^{-1} *est dérivable en* x_0 *avec :*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Application 2.5. *Démontrer que la fonctions suivante est bijective, et donner l'équation de la tangente à la courbe* $y = f^{-1}(x)$ *au point* $x = 0$*.*

$$f : \left\{ \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -1 + e^{x-1} + \ln x \end{array} \right.$$

2.2 Extension aux fonctions dérivables sur un intervalle

Le Théorème 2.1 s'étend sans difficulté sur un intervalle : toutes les fonctions de références sont dérivables sur un intervalle I inclus dans leur domaine de définition sauf :

- les racines n-èmes, pour $n \geq 2$ qui sont dérivables sur $I \subset \mathbb{R}^*$;
- les fonctions *arcsin* et *arccos* dérivables sur$I \subset]-1;1[$;
- la fonction valeur absolue dérivable sur $I \subset \mathbb{R}^*$;
- la fonction partie entière dérivable en $I \subset \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Les Théorèmes 2.2 et 2.3 s'étendent également sur un intervalle I. Par exemple : si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Le théorème 2.4 s'étend aussi sur tout l'intervalle I :

Théorème 2.6. ***Dérivée de la fonction réciproque.***
Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone sur I. Alors :

- *f est bijective de I sur $J = f(I)$;*
- *f^{-1} est strictement monotone sur J (et de même sens de variation que f) et continue sur $f(I)$: $f^{-1} \in \mathscr{C}(f(I), I)$;*
- *Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ avec :*

$$\forall x \in f(I), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3 Propriétés des fonctions dérivables

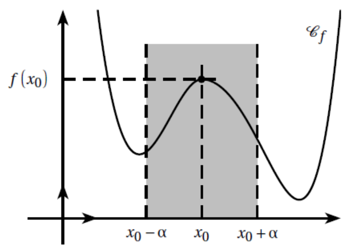
3.1 Notion d'extremum local

Définition 3.1. *On dit que f admet un **maximum local** en $x_0 \in I$ lorsque il existe un voisinage J de x_0 tel que :*

$$\forall x \in I \cap J, f(x) \leq f(x_0)$$

Autrement dit :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, f(x) \geq f(x_0)$$

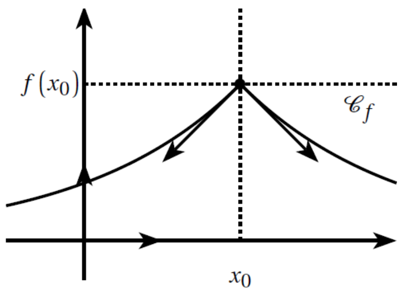


On définit de même la notion de ***minimum local****.*
On dit que f admet un ***extremum local*** *lorsqu'elle admet un minimum ou un maximum local.*

Proposition 3.2. ***Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.***
Soit f définie et dérivable sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas une borne de I (on parle de point intérieur à I).
Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 3.3.

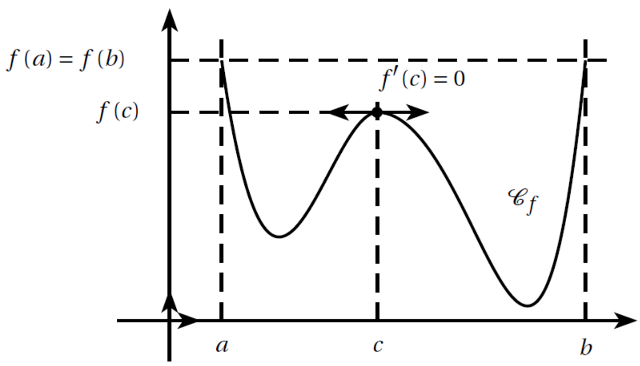
- *$f'(x_0) = 0$ est une condition nécessaire mais pas suffisante. Par exemple $f : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ est un point intérieur tel que $f'(x_0) = 0$. Mais f n'admet pas d'extremum local en 0.*
- *f dérivable en x_0 est également une condition nécessaire :*



- *Cette propriété n'est valable qu'en un point intérieur. Par exemple $f : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $I = [-1; 1]$.*
f admet un minimum local en $x_0 = -1$ qui n'est pas un point intérieur mais $f'(-1) = 3 \neq 0$.

3.2 Théorème de Rolle

Théorème 3.4. ***Théorème de Rolle.***
Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a; b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Preuve : Si f est constante sur $[a;b]$ il n'y a rien à faire ; sinon, on sait que f admet un maximum M et un minimum m sur $[a;b]$, et au moins l'un des deux doit être différent de $f(a)$. Disons par exemple que $M > f(a)$ et soit $c \in \,]a;b[$ tel que $f(c) = M$.
Alors $f(c)$ est le maximum de f sur $]a;b[$: c est un maximum local de f, donc $f'(c) = 0$.

Remarque 3.5.
- *Le réel c n'est en général pas unique (c'est le cas sur la figure précédente).*
- *Le théorème de Rolle peut s'interpréter :*
  - *de manière géométrique : par la présence d'une tangente horizontale ;*
  - *de manière cinématique : il existe un instant où la vitesse s'annule*

Méthode 3.6. *Le thérème de Rolle permet de prouver l'existence de zéros d'une fonction f sur un segment $[a;b]$: il suffit que cette fonction soit la dérivée de F avec $F(a) = F(b)$.*

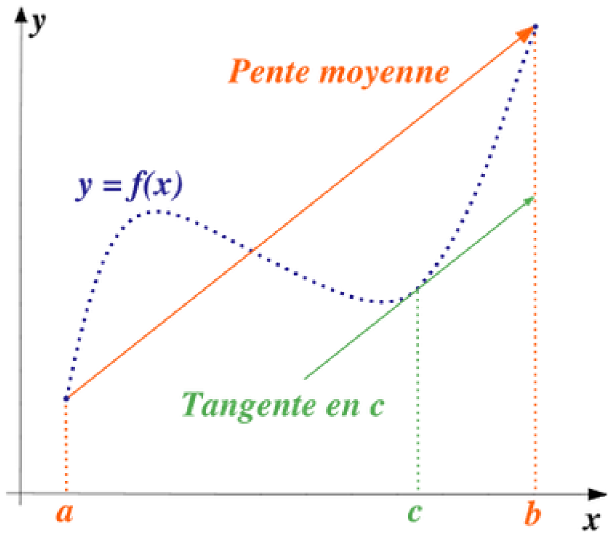
Application 3.7. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \end{cases}$.
Démontrer que f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0;1[$.

Application 3.8. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sin^4(x) + \frac{2cos^2(x)}{5+sin^6(x)} \end{cases}$.
Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur $]a;a+\pi[$.

3.3 Accroissements finis et applications

Théorème 3.9. *Égalité des accroissements finis.*
Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a;b[$.
Alors il existe $c \in \,]a;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



Preuve : On pose $g(x) = f(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a))$.

Remarque 3.10. • *Le réel c n'est en général pas unique (c'est le cas sur la figure précédente).*

- *Le théorème des accroissements finis peut s'interpréter :*
  - *de manière géométrique : par la présence d'une tangente parallèle à la sécante (AB) de $\mathscr{C}_f$ si $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$;*
  - *de manière cinématique : il existe un instant en lequel la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre les instants $t = a$ et $t = b$.*

Application 3.11. *1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $a < b$.*

(a) Démontrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{1}{1+c^2} = \frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a}$;

(b) Justifier que $\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{1+a^2}$;

(c) En déduire que $\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a} \leq \frac{1}{1+a^2}$

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{1+x^2} \leq arctan(x) \leq x$.

Théorème 3.12. *Soit* $[a;b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$*, dérivable sur* $]a;b[$*. Alors :*

$$f \text{ est constante sur } [a;b] \Leftrightarrow \forall x \in \left]a;b\right[, f'(x) = 0$$

Théorème 3.13. *Soit* $[a;b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$*, dérivable sur* $]a;b[$*. Alors :*

$$f \text{ est croissante sur } [a;b] \Leftrightarrow \forall x \in \left]a;b\right[, f'(x) \geq 0$$

Remarque 3.14.
- *Les théorèmes 3.12 et 3.13 fournissent des résultats sur* $[a;b]$*, même si l'on ignore le comportement de* f' *aux bornes* a *et* b*.*
- *pour ces deux théorèmes, on peut remplacer le segment* $[a;b]$ *par un intervalle* I *quelconque et* $]a;b[$ *par l'intérieur de* I*.*

Théorème 3.15. ***Inégalité des accroissements finis.***
Soit $[a;b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$*, dérivable sur* $]a;b[$*.*
S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que :*

$$\forall x \in \left]a;b\right[, \mid f'(x) \mid \leq M$$

Alors :

$$\forall (x,y) \in [a;b]^2, \mid f(x) - f(y) \mid \leq M \mid x - y \mid$$

Méthode 3.16. *L'inégalité des accroissements finis permet :*
- *de majorer une expression du type* $\mid f(x) - f(y) \mid$ *;*
- *d'étudier des suites convergentes définies par récurrence du type* $u_{n+1} = f(u_n)$*.*

Application 3.17. *On considère* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{cases}$ *et la suite* (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. *Démontrer que* f *admet un unique point fixe sur* $\mathbb{R}$ *que l'on notera* α *avec* $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ *(c'est-à-dire un unique réel tel que* $f(x) = x$*).*

2. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq u_1$.

   Indication : $e^{\frac{-1}{2}} \approx 0,61$ *et* $e^{-e^{\frac{-1}{2}}} \approx 0,55$.
3. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{4}{5} \mid u_n - \alpha \mid$.
4. *En déduire que* $(\mid u_n - \alpha \mid)_n$ *est majorée par une suite géométrique de raison* $\frac{4}{5}$.
5. *En déduire que la suite* (u_n) *converge vers* α.
6. *A partir de quel rang,* u_n *est-il une approximation de* α *à* 10^{-p} *avec* $p \in \mathbb{N}^*$ *donné ? Écrire un script sous Python permettant d'obtenir* α *avec une précision de* 10^{-p}.

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 3.18. *Soit* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *dérivable sur* $I - \{x_0\}$ *et soit* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$

Remarque 3.19. *Ce théorème s'interprète géométriquement par la présence d'une tangente en a :*

- *si* $\ell = \pm\infty$ *alors cette tangente est verticale (d'équation* $x = a$*) ;*
- *si* $\ell \in \mathbb{R}$ *alors la tangente a pour équation* $y = \ell(x - x_0) + f(x_0)$.
  Dans ce cas, f *est dérivable en* x_0*,* f' *est continue en* x_0 *et* $f'(x_0) = \ell$.

Application 3.20. *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ln(x) \ si \ x > 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}.$$

Démontrer que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

4.1 Dérivées successives

Définition 4.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$.*

- *On appelle dérivée k-ème de f la fonction notée $\boldsymbol{f^{(k)}}$ définie par récurrence par :* $\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \end{cases}$.
  Ainsi $f^{(k+1)}$ n'existe qu'à condition que $f^{(k)}$ existe et soit dérivable.
  $f^{(k)}$ est aussi notée $\frac{d^k f}{dx^k}$.
- *Si $f^{(k)}$ existe, alors on dit que f est **k fois dérivable**. Si, de plus, $f^{(k)}$ est continue sur I alors on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*
  on note $\boldsymbol{\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

Application 4.2. *Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, cos^{(n)}(x) = cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

On peut généraliser le Théorème 2.1 aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$:

Théorème 4.3. *Toutes les fonctions de référence sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle I inclus dans leur ensemble de définition, sauf :*

- *les racines n-èmes, pour $n \geq 2$ qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \subset \mathbb{R}^*$;*
- *les fonctions arcsin et arccos qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \subset]-1; 1[$;*
- *la fonction valeur absolue dérivable qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \subset \mathbb{R}^*$;*
- *la fonction partie entière dérivable qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \subset \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.*

4.2 Propriétés

Proposition 4.4. *Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(f, g) \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *$f + g$ et λf sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. De plus, si $k \in \mathbb{N}$ alors :*

$$(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)} \text{ et } (\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$$

- *fg est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. De plus, si $k \in \mathbb{N}$ alors :*

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \quad \textbf{\textit{Formule de Leibniz}}$$

- *si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

Application 4.5. *Calculer la dérivée d'ordre n de :*

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^2 e^x \end{cases}$

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4xe^{3x} \end{cases}$

Théorème 4.6. *Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathscr{C}^k(I, J)$ avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$.*
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Théorème 4.7. *Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathscr{C}^k(I, f(I))$ strictement monotone sur I. Alors :*

- *f est bijective de I sur $f(I)$;*
- *f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ (et de même sens de variation que f) et continue sur $f(I)$;*
- *si $k \geq 1$ avec f' ne s'annulant pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $f(I)$.*