

Programme de khôlle 2

Semaine du 12 septembre 2022

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k -ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?
 - (a) $\{f_1 : x \mapsto 1, f_2 : x \mapsto e^x, f_3 : x \mapsto xe^{2x}\}$
 - (b) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \cos 2x, f_3 : x \mapsto \cos 3x, f_4 : x \mapsto \cos 4x\}$
 - (c) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \cos(x+1), f_3 : x \mapsto \cos(x+2)\}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \text{ où } u_1 = (1; -1; 2; 2)$$

$$u_2 = (2; 1; 4; -2)$$

$$u_3 = (1; 2; 2; -4)$$

Donner une base des sous-espaces vectoriels $F, G, F \cap G$, et $F + G$.

Exercice 2.2. Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E

2. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E .

Exercice 2.3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes :

$$P_1 = X^2 + X, P_2 = X^2 - X \text{ et } P_3 = X^2 - 1.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit \mathcal{C} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, donner la matrice de passage de \mathcal{C} vers \mathcal{B} puis celle de \mathcal{C} vers \mathcal{B} .
3. Montrer que, dans cette base \mathcal{B} , les coordonnées d'un polynôme P sont $\left(\frac{P(1)}{2}; \frac{P(-1)}{2}; -P(0)\right)$.
4. Quelle sont les coordonnées du polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ dans la base \mathcal{B} .
On procèdera selon deux méthodes distinctes.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

1 Rappels et compléments sur les matrices

2 Généralités sur les espaces vectoriels

2.1 Définition

2.2 Familles de vecteurs

2.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré

2.2.2 Familles génératrices

2.2.3 Familles libres

3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition

4.1.1 Base

4.1.2 Dimension

5 Somme de sous-espaces vectoriels

5.1 Deux sous-espaces vectoriels

5.1.1 En dimension quelconque

5.1.2 En dimension finie

5.2 Plusieurs sous-espaces vectoriels

6 Hyperplans