Programme de khôlle 8

Semaine du 20 novembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Question de cours(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Question de cours

1. Définir un système complet d'événements et donner la formule de Bayes.
2. (a) Formule des probabilités composées.
   (b) Mutuelle indépendance d'une famille d'événements, illustration du cas $n = 3$.
3. Formule des probabilités totales, illustration dans le cas $n = 3$.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f?*
2. *Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?*
3. *On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Exercice 2.2. *Soit A la matrice* $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1. *Diagonaliser A.*
2. *Calculer A^n en fonction de n.*

3. *On considère les suites* $(u_n), (v_n)$ *et* (w_n) *définies par leur premier terme* u_0, v_0 *et* w_0 *et les relations suivantes :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. *On pose* $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) *Exprimer* X_{n+1} *en fonction de* A *et* X_n.

   (b) *En déduire* u_n, v_n *et* w_n *en fonction de* n.

Exercice 2.3. 1. *Calculer le terme général de la suite suivante :* $\forall n \in \mathbb{N}, 2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0$ *et* $f_0 = f_1 = 1$.

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.
La formule obtenue est-elle valable pour $n = 0$ *?*

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
1.1 Valeurs propres, vecteurs propres
1.2 Sous-espaces propres
1.3 Polynôme caractéristique
1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

2 Les propriétés utiles des éléments propres
2.1 Autour des valeurs propres
2.2 Autour des vecteurs propres
2.3 Autour des sous-espaces propres

3 Matrice ou endomorphisme diagonalisable
3.1 Définition
3.2 Les théorèmes de diagonalisation
3.3 Comment diagonaliser une matrice ?
3.4 Comment diagonaliser un endomorphisme ?

4 Matrice ou endomorphisme trigonalisable
4.1 Définition
4.2 Le théorème de trigonalisation
4.3 Exemple de trigonalisation

Chap.7 : Probabilités sur un univers dénombrable