

# Programme de khôlle 8

Semaine du 20 novembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Question de cours(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Question de cours

1. Définir un système complet d'événements et donner la formule de Bayes.
2. (a) Formule des probabilités composées.  
(b) Mutuelle indépendance d'une famille d'événements, illustration du cas  $n = 3$ .
3. Formule des probabilités totales, illustration dans le cas  $n = 3$ .

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** Soit  $m$  un nombre réel et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 - m & m - 2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de  $f$ ?
2. Pour quelles valeurs de  $m$  l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose  $m = 2$ . Calculer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.2.** Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser  $A$ .
2. Calculer  $A^n$  en fonction de  $n$ .

3. On considère les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par leur premier terme  $u_0, v_0$  et  $w_0$  et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour  $n \geq 0$ . On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

- (a) Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $A$  et  $X_n$ .  
 (b) En déduire  $u_n, v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 2.3.** 1. Calculer le terme général de la suite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0 \text{ et } f_0 = f_1 = 1.$$

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La formule obtenue est-elle valable pour  $n = 0$  ?

## Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

### 1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

- 1.1 Valeurs propres, vecteurs propres  
 1.2 Sous-espaces propres  
 1.3 Polynôme caractéristique  
 1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

### 2 Les propriétés utiles des éléments propres

- 2.1 Autour des valeurs propres  
 2.2 Autour des vecteurs propres  
 2.3 Autour des sous-espaces propres

### 3 Matrice ou endomorphisme diagonalisable

- 3.1 Définition  
 3.2 Les théorèmes de diagonalisation  
 3.3 Comment diagonaliser une matrice ?  
 3.4 Comment diagonaliser un endomorphisme ?

### 4 Matrice ou endomorphisme trigonalisable

- 4.1 Définition  
 4.2 Le théorème de trigonalisation  
 4.3 Exemple de trigonalisation

4.4 Retour sur le polynôme caractéristique

5 Applications de la réduction

5.1 Puissances de matrice

5.1.1 Matrices diagonalisables

5.1.2 Matrices trigonalisables

5.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

6 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

6.1 La théorie

6.2 Pratique de la résolution

6.3 Comportement asymptotique des solutions

6.4 Équations différentielles scalaires d'ordre  $n$  à coefficients constants

**Chap.7 : Probabilités sur un univers dénombrable**

1 Rappels de vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

1.2 Univers

1.3 Événement

1.4 Système complet d'événements

2 Espaces probabilisés

2.1 Espace probabilisé fini

2.2 Espace probabilisé dénombrable

3 Calculer une probabilité

3.1 Propriétés de base

3.2 Utilisation des événements élémentaires

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Définition

4.2 Formules

4.2.1 Formule des probabilités composées

4.2.2 Formule des probabilités totales

4.2.3 Formule de Bayes

5 Indépendance d'événements