Exercices
Chap.4 : Déterminants

1 Propriétés générales

Exercice 1.1. *Soit n un entier non nul impair et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique.*

1. *Exprimer de deux façons* $\det\left(A^T\right)$ *en fonction de* $\det(A)$.
2. *Que peut-on dire de la valeur de* $\det(A)$ *?*
3. *Et si n est pair ?*

Exercice 1.2. *On considère deux matrices inversibles A et B appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$.*

1. *Montrer que n est un entier pair.*
2. *Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A.*

Exercice 1.3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice B de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A.*

2 Calculs de déterminants

Exercice 2.1. *On souhaite calculer* $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

1. *Effectuer sur D l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.*
2. *Effectuer sur D les opérations* $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$.
3. *À l'aide d'échanges de lignes et de colonnes, montrer que :*

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ b-a & -b & 0 & 0 \\ b-a & c-b & -c & 0 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

4. *Conclure sur la valeur de D.*

Exercice 2.2. *Calculer les déterminants suivants :*

1. $D_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

3. $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

Exercice 2.3. *Résoudre l'équation :* $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0$

Indication : *utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes pour «faire sortir ≫ des facteurs du type $ax+b$.*

Exercice 2.4. *Soient a, b et c trois réels distincts. On pose, pour tout réel* $x, f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ b-x & c-x & a-x \\ b-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$

1. (a) *À l'aide de deux opérations sur les lignes montrer que*

$$f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

où $d, e, f,\ g, h$ et k ne dépendent pas de x.

   (b) *Sans calculer explicitement le déterminant, expliquer pourquoi $f(x)$ est de la forme $mx+p$ avec m et p deux réels indépendants de x.*

2. (a) *Calculer $f(a)$ et $f(b)$.*

   (b) *En déduire les valeurs de m et p en fonction de a, b et c.*

3. *Grâce aux calculs précédents, calculer très rapidement* $\begin{vmatrix} c & a & a \\ b & c & a \\ b & b & c \end{vmatrix}$.

4. *En s'inspirant de la méthode détaillée ci-dessus, calculer* $\begin{vmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{vmatrix}$

   (déterminant d'ordre n)

Exercice 2.5. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \geqslant 2$ calculer le déterminant d'ordre* *n suivant :*

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Indication : *on pourra commencer par ajouter à la première colonne toutes les autres colonnes.*

Exercice 2.6. *On considère les 3 polynômes suivants :*

$$Q_0 = X - \mathrm{i} \quad Q_1 = X + \mathrm{i} \quad Q_2 = X^2 - \mathrm{i}X$$

On considère de plus la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$: $\mathscr{B}_c = (P_0, P_1, P_2)$.

1. *Montrer que la famille* $\mathscr{B} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ *est une base de* $\mathbb{C}_2[X]$.
2. *Calculer* $\det_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2)$.

Exercice 2.7. *On considère* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des matrices symétriques de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la famille* $\mathscr{B} = (A, B, C)$, *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *est une base de* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$
2. *On pose* $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\det_{\mathscr{B}}(M_1, M_2, M_3)$.
3. *La famille* (M_1, M_2, M_3) *est-elle une base de* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *?*

3 Déterminant d'endomorphisme

Exercice 3.1. *Soit u l'application définie sur* $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = XP' + P(1)$.

1. *Montrer que u est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Calculer* $\det(u)$.
3. *u est-il un automorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *?*

4 Pour aller plus loin

Exercice 4.1. *Le déterminant de* ***Vandermonde*** *de* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ *est défini par :*

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. *Quelle est la valeur de ce déterminant s'il existe* $i \neq j$ *tel que* $a_i = a_j$ *?*
2. *On suppose maintenant que les* a_i *sont deux à deux distincts. Pour tout* x *réel, on pose :*

$$P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x).$$

   (a) *Montrer que* P *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* $n-1$.
   (b) *Quelles sont les racines du polynôme* P?
   (c) *Quel est le coefficient du terme de plus haut degré dans le polynôme* P?
   (d) *En déduire que,* $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \times \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$.
3. *Montrer par récurrence que :* $\forall n \geqslant 2, V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.