

Programme de khôlle 12

Semaine du 11 décembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0 .

Déterminer leurs développements ainsi que les rayons de convergence correspondants :

1. $f(x) = \frac{1+2x}{1-x}$
2. $g(x) = \sin^2(x)$
3. $h(x) = \frac{1}{(1+2x)^2}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 3} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$.

Indication : on pourra chercher $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = a + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n-2}$$

Exercice 2.2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{n^3}{n!} x^n$.

Exercice 2.3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, \quad w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \end{cases}$$

1. Exprimer, pour tout entier n , w_n en fonction de n .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$.

3. Montrer que pour tout $x \in]-R; R[$: $(1 - x - x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$.

Chap.9 : Séries entières

1 Convergence d'une série entière

1.1 Vocabulaire

1.2 Premiers exemples

1.3 Rayon de convergence

2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

2.1 Utilisation du critère de D'Alembert

2.2 Quelques astuces

2.3 Par comparaison

2.4 Par équivalence

3 Cas d'une série entière d'une variable réelle

3.1 Fonction somme

3.2 Continuité, dérivabilité

3.3 Intégration terme à terme

4 Développement d'une fonction en série entière

4.1 Mise en place

4.2 Méthodes de développement en série entière

5 Application des développements en série entière

5.1 Calcul de la somme d'une série entière

5.2 Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle

6 Exponentielle complexe