

Programme de khôlle 19

Semaine du 12 février 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Question de cours (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Question de cours

Démontrer et compléter les propriétés suivantes :

1. Soit M une matrice orthogonale. Alors $\det(M) \in \dots\dots\dots$
2. Soit $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de E on a :

$$\mathcal{M}(f) = \dots\dots\dots$$

On dit alors que f est la

3. Décrire les isométries de \mathbb{R}^3 . Indiquer dans chaque cas comment obtenir les éléments caractéristiques.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. 1. Caractériser géométriquement l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de la rotation vectoriel d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 2.2. 1. Caractériser l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\vec{u} = (3, 1)$.

Exercice 2.3. 1. La matrice suivante est-elle diagonalisable dans une base orthonormée ? Si c'est le cas, la diagonaliser dans une base orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Indication : on pourra remarquer que A est symétrique.

2. Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de \mathbb{R}^3 .

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

1 Isométries

- 1.1 Groupe orthogonal
- 1.2 Symétrie orthogonale
- 1.3 Matrices orthogonales
- 1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3

- 2.1 Orientation d'un espace vectoriel
- 2.2 En dimension 2
- 2.3 En dimension 3

3 Matrices symétriques

Théorème spectral

Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance

1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies

- 1.1 Loi d'un couple
- 1.2 Lois marginales
- 1.3 Loi conditionnelle
- 1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.
- 1.5 n variables aléatoires

2 Indépendance de V.A.R. finies

- 2.1 Deux variables

2.2 n variables

3 Somme et produit de deux V.A.R. finies

3.1 Espérance

3.2 Somme de lois de Bernoulli

3.3 Covariance