

Chap.20 : Droites, plans et sphères de l'espace

Dans tout ce qui suit, l'espace sera muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel seront exprimées toutes les coordonnées des points et vecteurs.

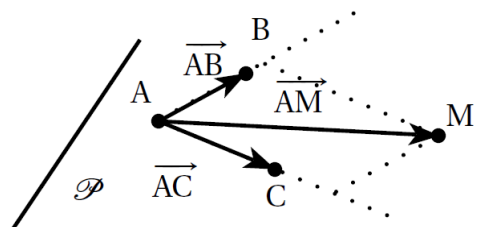
1 Plans de l'espace

1.1 Définition par points et vecteurs

Définition 1.1. Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace peut être défini de trois manières différentes :

- par la donnée de trois points non alignés A, B et C . Dans ce cas :

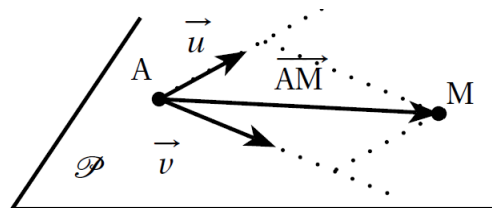
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\ &\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \end{aligned}$$



- par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires} \\ &\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \end{aligned}$$

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux **vecteurs directeurs** du plan $\mathcal{P}$.

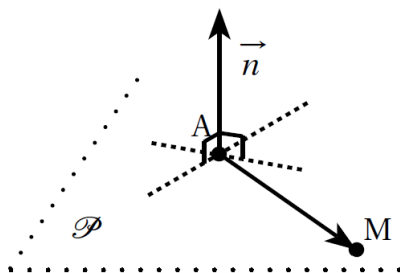


- par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\mathcal{P}$. Dans ce cas :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** du plan $\mathcal{P}$.



1.2 Équation cartésienne de plan

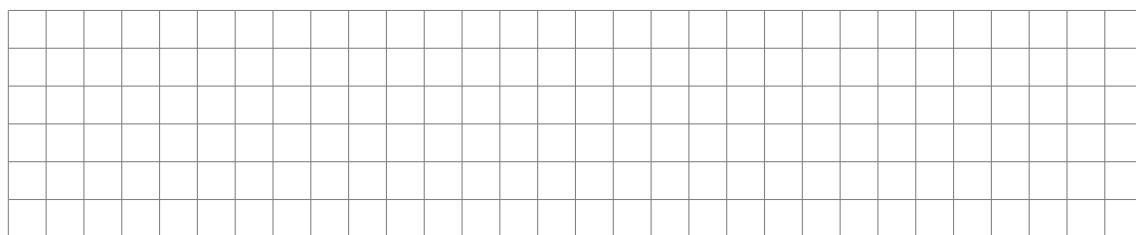
Théorème 1.2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et soit $d \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

Réciproquement, pour tout plan de l'espace, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et

$$\mathcal{P} = \{M(x; y; z), ax + by + cz + d = 0\}$$

L'écriture $ax + by + cz + d = 0$ est appelée une **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$.

Preuve :



Méthode 1.3. Pour obtenir une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$, on écrit :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

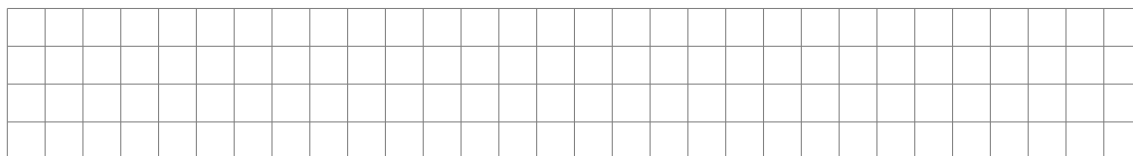
1.3 Systèmes d'équations paramétriques

Définition 1.9. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels qu'il existe $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' s \\ y = y_A + \beta t + \beta' s \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' s \end{cases}$$

Une telle écriture est appelée un **système d'équations paramétriques** du plan $\mathcal{P}$.

Application 1.10. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(-3; 0; 2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Méthode 1.11. On passe d'un système d'équations paramétriques à une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ en écrivant :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

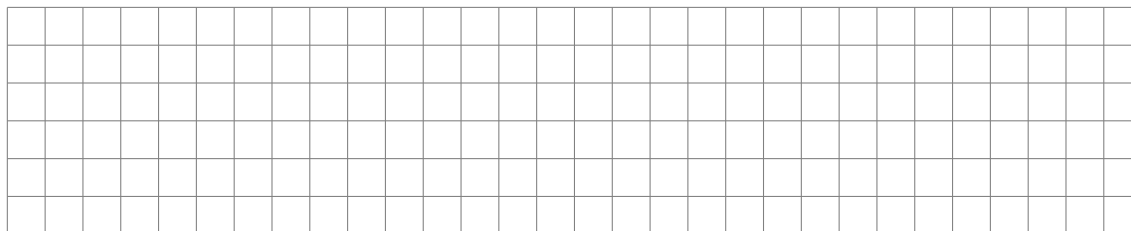
On peut aussi exprimer t et s en fonction de x, y et z à l'aide des deux premières équations et remplacer s et t dans la dernière équation.

On obtient ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Application 1.12. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ ayant pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - s \\ y = -3t \\ z = -2 - t + 3s \end{cases}, (s, t) \in \mathbb{R}^2$$



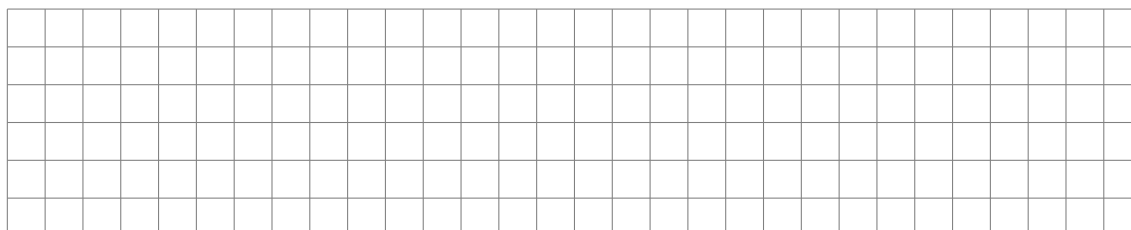
Méthode 1.13. Il faut également savoir passer d'une équation cartésienne d'un plan à un système d'équations paramétriques.

Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq 0$. Si par exemple $a \neq 0$ alors on peut isoler x et écrire :

$$ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b}{a}t - \frac{c}{a}s - \frac{d}{a} \\ y = t \\ z = s \end{cases}, (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit en particulier que $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{-b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{-c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

Application 1.14. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - 3y + 2z + 1 = 0$.



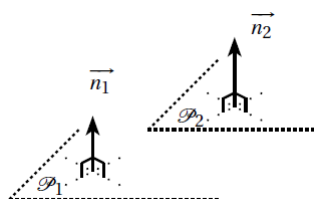
1.4 Intersection de plans

Remarque 1.15. Un plan $\mathcal{P}$ n'est pas défini par une unique équation cartésienne (ou un unique système d'équations paramétriques). Plus précisément, si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont deux équations cartésiennes du même plan lorsque :

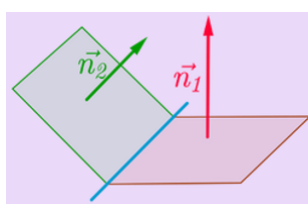
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz + d = \lambda(a'x + b'y + c'z + d')$$

Théorème 1.16. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

- si les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ou confondus.



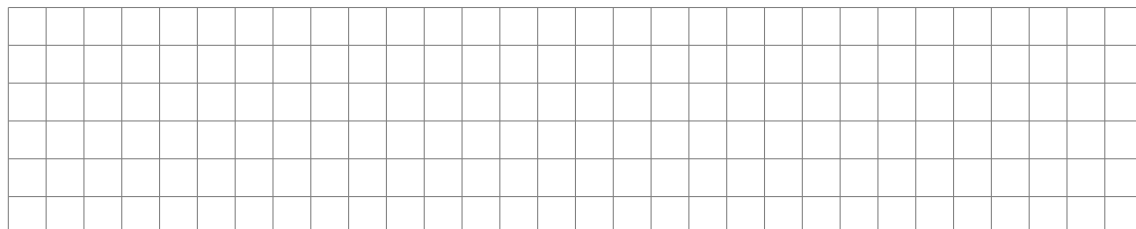
- si les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire si $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$), alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite.



Application 1.17. On considère les deux plans de l'espace donnés par des équations cartésiennes :

$$\mathcal{P}_1 : -x + 2y - 3z + 2 = 0 \text{ et } \mathcal{P}_2 : 2x - y + 4z - 1 = 0$$

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.
2. Déterminer les coordonnées d'un point A de $\mathcal{D}$.

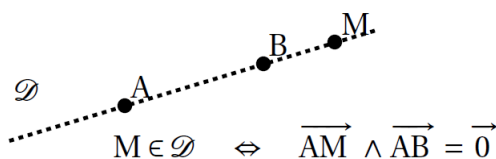


2 Droites de l'espace

Définition 2.1. Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est caractérisée par :

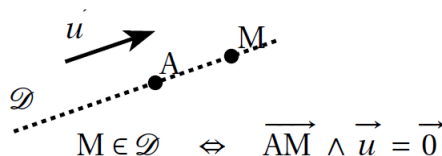
- la donnée de deux points distincts A et B . Dans ce cas :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$



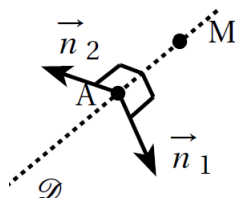
- la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$. Dans ce cas :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

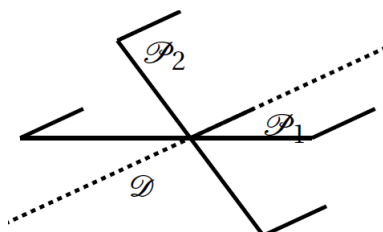


- la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ orthogonaux à $\mathcal{D}$. Dans ce cas :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_2 = 0$$



- la donnée de deux plans non parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant chacun $\mathcal{D}$.



2.1 Système d'équations cartésiennes

Définition 2.2. La définition d'une droite $\mathcal{D}$ comme intersection de deux plans non parallèles

$$\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \mathcal{P}_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

conduit à la caractérisation suivante :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Ce système est appelé un **système d'équations cartésiennes** de $\mathcal{D}$.

Remarque 2.3. Comme pour les plans, une droite a une infinité de systèmes d'équations cartésiennes.

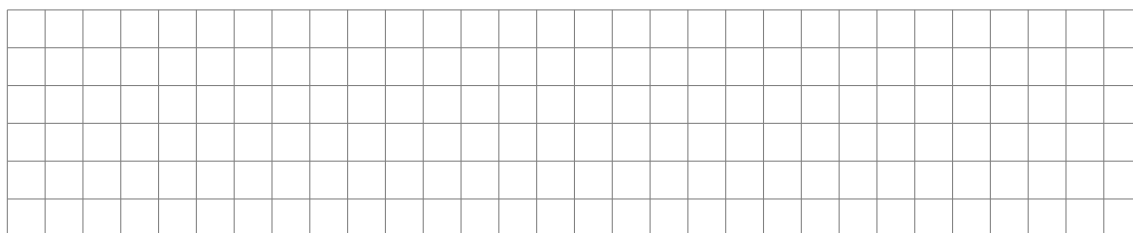
Proposition 2.4. Soient $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ deux vecteurs normaux respectifs de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Alors :

- $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont deux vecteurs orthogonaux à $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
- $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Application 2.5. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

puis donner un point de $\mathcal{D}$.



2.2 Système d'équations paramétriques d'une droite

Définition 2.6. Pour une droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$:

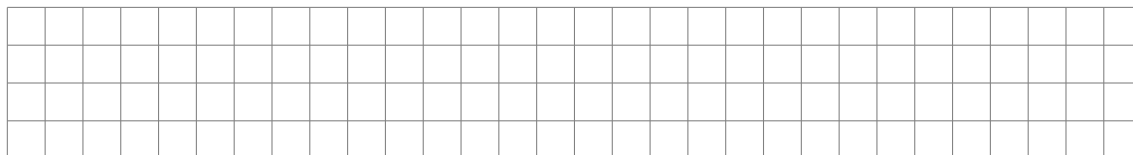
$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et si $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ alors :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

On dit alors que $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est un **système d'équations paramétriques** de la droite $\mathcal{D}$.

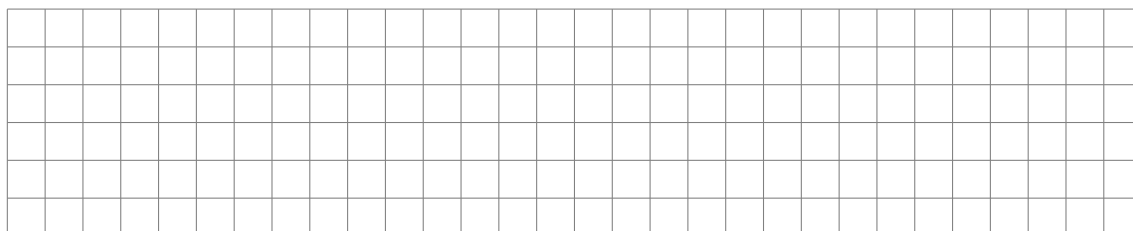
Application 2.7. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ qui passe par $A(0; -2; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Méthode 2.8. On passe d'un système d'équations cartésiennes d'une droite à un système d'équations paramétriques d'une droite $\mathcal{D}$:

1. en isolant x dans la première équation (si $a \neq 0$) ;
2. en substituant ensuite dans la seconde équation, qui, ne faisant intervenir que y et z , permet d'exprimer par exemple y en fonction de z ;
3. en substituant dans la première équation cette dernière expression de y .

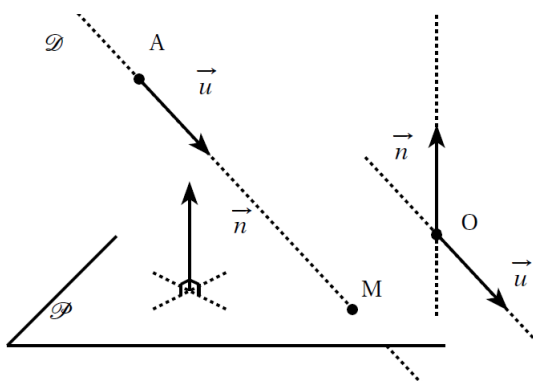
Application 2.9. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$:
$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$



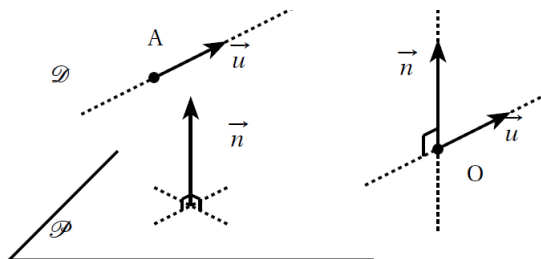
2.3 Intersection de plans et de droites

Théorème 2.10. Soient un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par un point A .

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul point d'intersection M :



- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors :
 - soit $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$: $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$
 - soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$



Méthode 2.11. On détermine l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ passant par

$A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et du plan $\mathcal{P} : ax + by + cz +$

$d = 0$ en résolvant le système : $(\mathcal{S}) \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}.$

$(\mathcal{S})$ peut avoir :

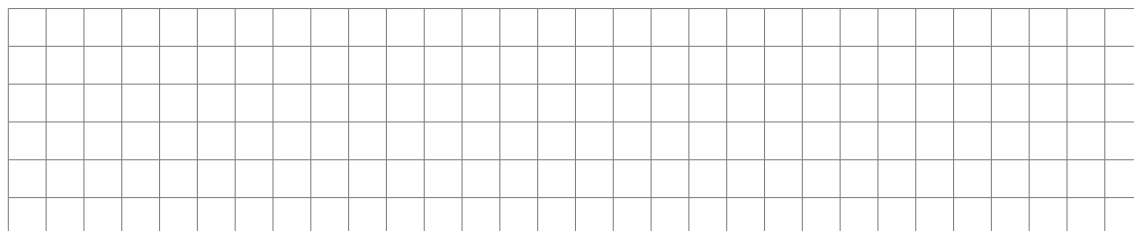
- un unique quadruplet (x, y, z, t) solution : alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point de coordonnées (x, y, z) ;
- aucune solution : alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles ;
- une infinité de solutions : alors $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

Application 2.12. Étudier la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ dans les différents cas :

1. $\mathcal{D}$ passant par le point $A(-2; 3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B}$

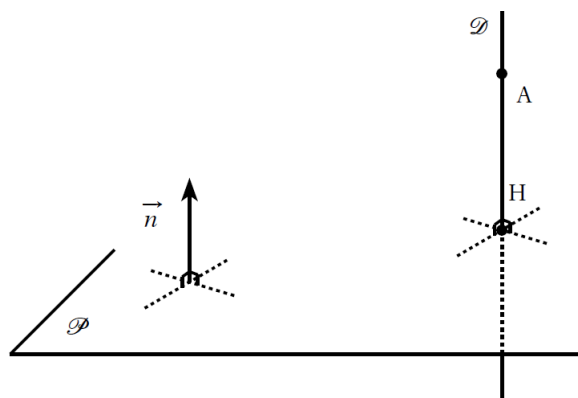
et le plan $\mathcal{P} : x - 2y + z = 1$.

2. $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 3y + z = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{P} : 3x - 2y + z = 0$.



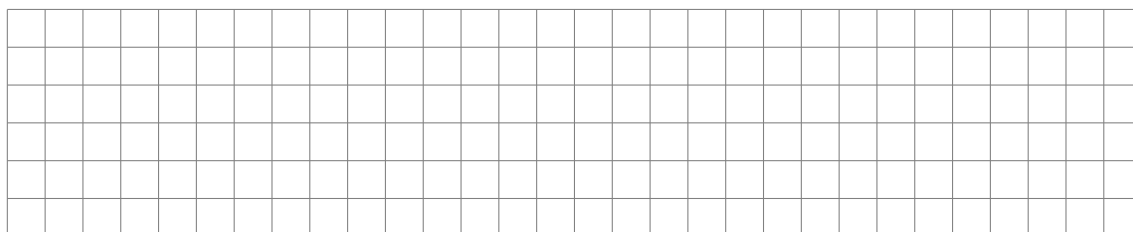
3 Projeté d'un point sur un plan ou une droite

Méthode 3.1. Pour déterminer le **projeté orthogonal** d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ sur un plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, on détermine le point d'intersection H entre le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

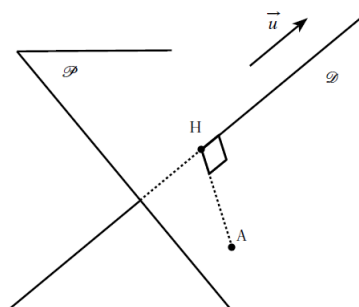


Application 3.2. On considère les points $A(1; -1; 2)$ et $B(2; 1; 3)$ et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

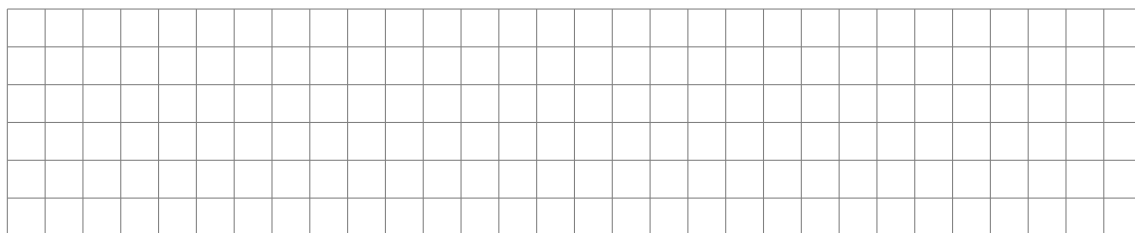
1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.



Méthode 3.3. Pour déterminer le **projeté orthogonal** d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ sur une droite $\mathcal{D}$ donnée par un point et un vecteur directeur $\vec{u}$, on détermine le point d'intersection H entre le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ et la droite $\mathcal{D}$.



Application 3.4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(2; 0; -1)$ sur la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(-1; 1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



4 Calcul de distances

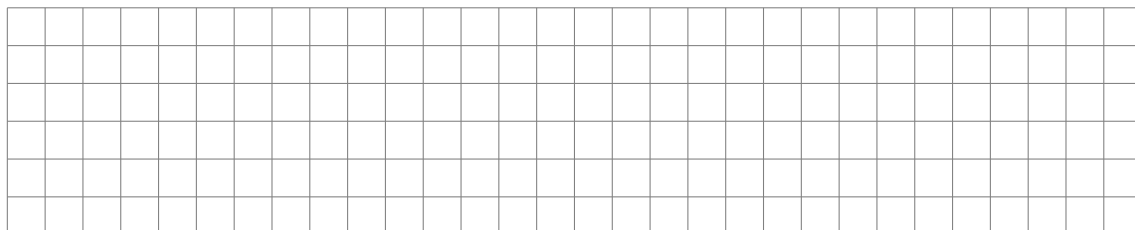
Théorème 4.1. Soit une droite $\mathcal{D}$ passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit M un point quelconque de l'espace. Alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$, notée $d(M, \mathcal{D})$ vaut :

$$d(M, \mathcal{D}) = HM = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

si H désigne le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Application 4.2. Calculer la distance du point $M(2; -3; 1)$ à la droite $\mathcal{D}$ qui passe par $A(-3; 1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

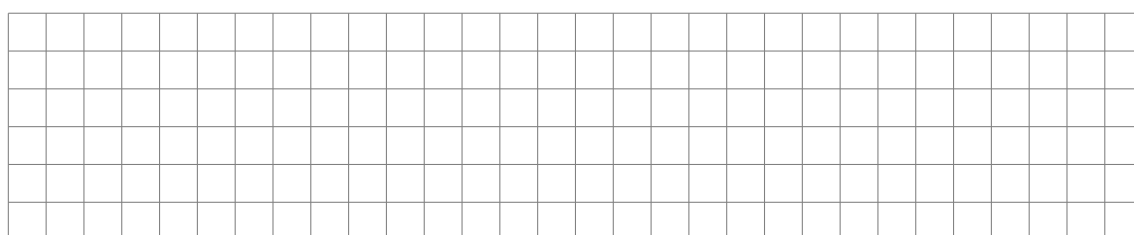


Théorème 4.3. Soit un plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point quelconque de l'espace. Alors la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, notée $d(A, \mathcal{P})$ vaut :

$$d(A, \mathcal{P}) = HA = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

si H désigne le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Application 4.4. Déterminer la distance du point $A(1; -1; 3)$ au plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 1 = 0$.



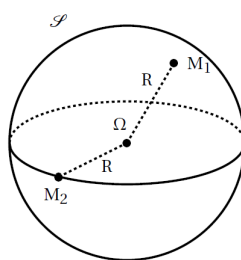
5 Sphères

5.1 Équation cartésienne de sphère

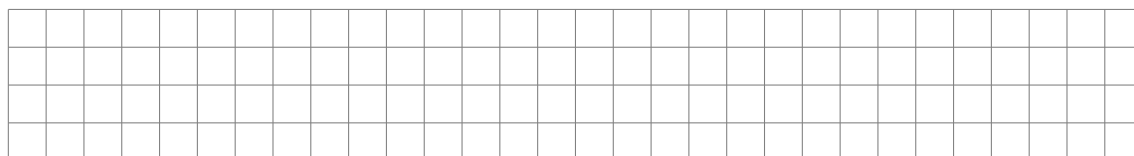
Définition 5.1. Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et $R \in \mathbb{R}_+$. La **sphère** $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\Omega M = R$.

$$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

L'écriture $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ s'appelle une **équation cartésienne** de $\mathcal{S}$.



Application 5.2. Donner une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(-2; 3; -1)$ et de rayon 2.



Méthode 5.3. Le développement de $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ donne une équation du type :

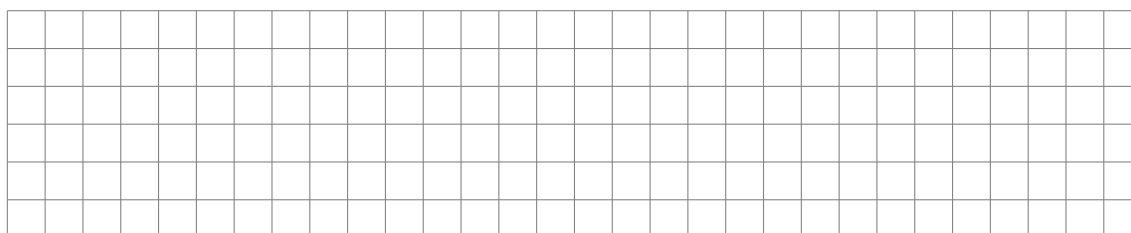
$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

Mais, réciproquement, une telle équation n'est pas nécessairement l'équation d'une sphère. Pour le savoir, on remplace :

- $x^2 + \alpha x$ par $(x + \frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2 = (x + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4}$
- $y^2 + \beta y$ par $(y + \frac{\beta}{2})^2 - (\frac{\beta}{2})^2 = (y + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{\beta^2}{4}$
- $z^2 + \gamma z$ par $(z + \frac{\gamma}{2})^2 - (\frac{\gamma}{2})^2 = (z + \frac{\gamma}{2})^2 - \frac{\gamma^2}{4}$

Application 5.4. 1. Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$. Quelle est la nature de $\mathcal{E}_1$?

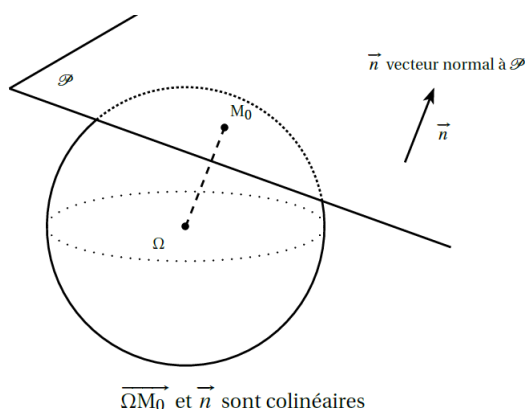
2. Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 3z + 4 = 0$. Quelle est la nature de $\mathcal{E}_2$?



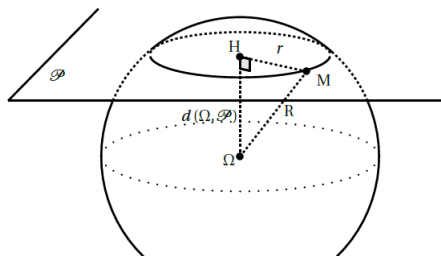
5.2 Intersection d'une sphère et d'un plan

Théorème 5.5. On considère une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon R , ainsi qu'un plan $\mathcal{P}$. Trois cas de figures se présentent :

- si $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$ alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$;
- si $d(\Omega, \mathcal{P}) = R$ alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{M_0\}$, on dit que le plan est **tangent** à la sphère en M_0 . De plus, $\overrightarrow{\Omega M_0}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$;



- si $d(\Omega, \mathcal{P}) < R$ alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C}(H, R)$: $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ se coupent suivant un cercle qui a pour centre le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $\mathcal{P}$.



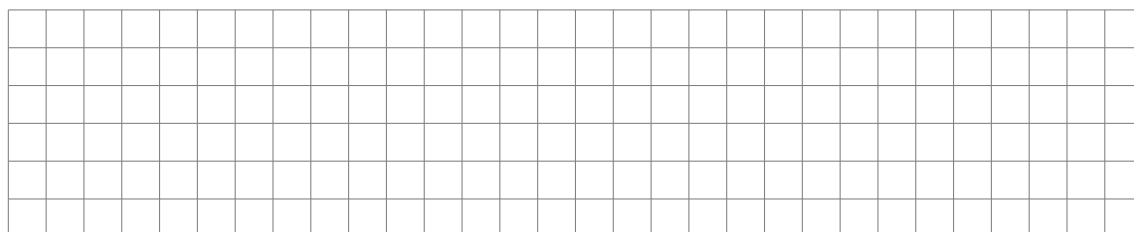
Méthode 5.6. Pour déterminer l'intersection entre la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R et un plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, on résout

le système : $(S) : \begin{cases} (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

- Lorsque (S) n'a aucune solution, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$;
- lorsque (S) possède une unique solution, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ sont tangents en un point M_0 dont les coordonnées sont solutions du système ;
- lorsque (S) possède une infinité de solutions, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ se coupent suivant un cercle $\mathcal{C}$ inclus dans un plan parallèle à $\mathcal{P}$, de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, \mathcal{P})^2}$

Application 5.7. Soit la sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω ayant pour équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$ et $\mathcal{P} : x + 2y + z = 5$.

1. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{P}$. Qu'en conclure ?
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.
3. Déterminer le rayon r du cercle $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$.



Application 5.8. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ dont les coordonnées vérifient :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0$$

1. Identifier $\mathcal{S}$.

2. Montrer que le point $A(2; 2; -1)$ appartient à $\mathcal{S}$ et donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par A .
3. Montrer que le plan $\mathcal{P} : x + y - s - 1 = 0$ coupe $\mathcal{S}$ et caractériser l'intersection entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$.

