Programme de khôlle 10

Semaine du 27 novembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Déterminer la nature au point $t = 0$ des arcs paramétrés suivants :

1. $t \mapsto (t + 2t^2 - t^3, t + 2t^2 - t^7)$
2. $t \mapsto (-t + t^2, t^2 + t^3)$
3. $t \mapsto (-t^2 - 2t^3, -t^3 - t^5)$
4. $t \mapsto (t^2 + 3t^3 + t^4, -2t^2 - 6t^3 + t^4)$.

Pour chaque arc, on notera $t \mapsto f(t)$ l'application correspondante.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Une boite contient deux jetons : un noir et un rouge.*
On tire n fois un jeton dans cette boite en le remettant après avoir noté sa couleur.
On note A_n l'événement "on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages" et B_n l'événement "on obtient au plus un jeton noir".

1. *Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.*
2. *A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?*
3. *Même question si $n = 3$.*

Exercice 2.2. *On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :*

- *si l'appareil fonctionne à l'instant $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n.*
- *si l'appareil est en panne à l'instant $n - 1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.*

On note F_n l'événement "l'appareil est en état de marche à l'instant n" et p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n ($p_n = P(F_n)$).

1. *Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.*
2. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = p_n - \frac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire une expression de q_n en fonction de n et p_0.*
3. *Exprimer p_n en fonction de n et de p_0.*
4. *Étudier la convergence de la suite (p_n).*

Exercice 2.3. *Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, il les oublie avec une probabilité $p_1 \in [0,1]$. Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité* $1/10$. *A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité* $4/10$. *On note p_n la probabilité que le professeur oublie ses clés le n-ième jour.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.*
2. *Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = p_n - \frac{4}{13}$$
est géométrique.
3. *En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.*

Chap.7 : Probabilités sur un univers dénombrable

1 Rappels de vocabulaire
1.1 Expérience aléatoire
1.2 Univers
1.3 Événement
1.4 Système complet d'événements

2 Espaces probabilisés
2.1 Espace probabilisé fini
2.2 Espace probabilisé dénombrable

3 Calculer une probabilité
3.1 Propriétés de base
3.2 Utilisation des événements élémentaires

4 Probabilité conditionnelle
4.1 Définition
4.2 Formules

Chap.8 : Fonctions vectorielles et courbes paramétrées