

# Programme de khôlle 11

Semaine du 4 décembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Pratique calculatoire

Déterminer le rayon de convergence  $R$  des séries entières suivantes :

- |                                           |                                                  |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ | 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}$             |
| 2. $\sum_{n \geq 0} n! z^n$               | 5. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$    |
| 3. $\sum_{n \geq 0} \ln(n+1) z^n$         | 6. $\sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^\alpha}$ |

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** *Étudier et tracer la courbe définie par :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

*Si nécessaire, on étudiera l'allure de la courbe au voisinage du ou des points singuliers.*

**Exercice 2.2.** *On considère la courbe paramétrée définie par :*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = \frac{1}{t} + t \end{cases}, t \in ]-2; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

1. *Montrer que cette courbe possède un unique point singulier et donner l'équation cartésienne de la tangente à la courbe en ce point.*
2. *Tracer la courbe.*

**Exercice 2.3.** 1. *Tracer la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x(t) = 2 \arctan(t) \\ y(t) = \ln\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \end{cases} .$$

2. Calculer la longueur  $L$  de la courbe  $\Gamma$  entre les points de paramètres  $0$  et  $\frac{1}{2}$ .

### **Chap.8 : Fonctions vectorielles et courbes paramétrées**

#### 1 Introduction

#### 2 Introduction aux fonctions vectorielles

- 2.1 Définition
- 2.2 Limite, continuité
- 2.3 Dérivabilité
  - 2.3.1 Définition
  - 2.3.2 Propriétés
  - 2.3.3 Développements limités

#### 3 Courbes définies par une représentation paramétrique

- 3.1 Représentation paramétrique
  - 3.1.1 Vocabulaire
  - 3.1.2 Réduction du domaine d'étude d'une courbe plane
- 3.2 Tangente en un point
  - 3.2.1 Définitions et propriétés
  - 3.2.2 Position locale d'une courbe plane par rapport à sa tangente
- 3.3 Exemples d'étude complète

#### 4 Longueur d'un arc paramétré

### **Chap.9 : Séries entières**

#### 1 Convergence d'une série entière

- 1.1 Vocabulaire
- 1.2 Premiers exemples
- 1.3 Rayon de convergence

#### 2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

- 2.1 Utilisation du critère de D'Alembert
- 2.2 Quelques astuces
- 2.3 Par comparaison
- 2.4 Par équivalence

#### 3 Cas d'une série entière d'une variable réelle

- 3.1 Fonction somme
- 3.2 Continuité, dérivabilité

### 3.3 Intégration terme à terme

#### 4 Développement d'une fonction en série entière

##### 4.1 Mise en place

##### 4.2 Méthodes de développement en série entière