

Programme de khôlle 1

Semaine du 11 septembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base \mathcal{B} .

(a) $u = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$

(b) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$

(c) $u : x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{3})$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$

2. Déterminer le rang des matrices suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(-1) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 2.2. (1). Montrer que les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer alors les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 2.3. *On note :*

$$F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - 3z = 0\} \text{ et } G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = -z\}.$$

1. *Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 .*
2. *Décomposer tout vecteur $u = (x; y; z)$ de E dans la somme directe $E = F \oplus G$*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Familles de vecteurs.

Calcul matriciel.

Espaces vectoriels.

Matrices d'une famille de vecteurs.

Espaces vectoriels de dimension finie.