Devoir-Maison 5

Exercice 0.1. *On considère l'équation :*

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. *Résoudre l'équation différentielle homogène associée à* (E).
2. *Trouver une solution particulière de* (E) *(expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de* (E).
3. *Déterminer l'unique solution* h *de* (E) *vérifiant* $h(0) = 1$ *et* $h(1) = 0$.
4. *Soit* $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable sur* $]0, \infty[$ *et qui vérifie :*
$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$
   (a) *On pose* $g(x) = f(e^x)$, *vérifier que* g *est solution de* (E).
   (b) *En déduire une expression de* f.

Exercice 0.2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$(E) : z^2 - \sqrt{3}z - i = 0.$$

Exercice 0.3. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$(E) : z^3 = \tfrac{1}{4}(-1 + i)$$

et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.