Interrogation 4 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Déterminer l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à la matrice :*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

On observe que $A \in O(3)$ car les colonnes forment une B.O.N de $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs, après calculs, $C_1 \wedge C_2 = C_3$ donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est une rotation vectorielle.

Pour obtenir l'axe de la rotation, on résout $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

La rotation est donc d'axe $\mathscr{D} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (orienté par ce vecteur $\overrightarrow{u}$).
Pour obtenir l'angle θ de la rotation, on résout :

$$1 + 2cos(\theta) = Tr(A) \Leftrightarrow 1 + 2cos(\theta) = \frac{2}{7} \Leftrightarrow cos(\theta) = \frac{-5}{14}.$$

Donc $\theta = \pm \arccos\left(-\frac{5}{14}\right)$.
On sait que le vecteur e_1 de la base canonique n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$ donc $sin(\theta)$ est du signe de :

$$det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e}_1, f(\overrightarrow{e}_1)) = det(\begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{2}{7} \\ 3 & 0 & \frac{3}{7} \\ 1 & 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \frac{-15}{7} < 0$$

donc $\theta = -arccos\left(-\frac{5}{14}\right)$