Devoir-Maison 5 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul. On définit alors une application φ par :*

$$\varphi :\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\times\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) & \longmapsto & \int_0^1 t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Symétrie *de φ : soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\times\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On a directement que :*

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) &= \int_0^1 t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^2\mathrm{Q}(t)\mathrm{P}(t)\mathrm{d}t\\ &= \varphi(\mathrm{Q},\mathrm{P})\end{aligned}$$

Par suite, φ est symétrique.

Bilinéarité *de φ : soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R})\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\times\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\times\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a directement que :*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q},\mathrm{R}) &= \int_0^1 t^2[(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(t)]\mathrm{R}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^2(\lambda\mathrm{P}(t)+\mathrm{Q}(t))\mathrm{R}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(\lambda t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{R}(t)+\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^1 t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{R}(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 t^2\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\varphi(\mathrm{P},\mathrm{R})+\varphi(\mathrm{Q},\mathrm{R})\end{aligned}$$

et ainsi φ est linéaire à gauche.
Comme φ est symétrique, on en déduit qu'elle est bilinéaire.

Caractère positif *de φ : soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Par définition de φ, on a :*

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = \int_0^1 (t\mathrm{P}(t))^2\ \mathrm{d}t.$$

La fonction $t\longmapsto(t\mathrm{P}(t))^2$ est une fonction continue et positive sur $[0;1]$, par positivité de l'intégrale il vient que $\int_0^1(t\mathrm{P}(t))^2\ \mathrm{d}t$ est positif, c'est à dire

$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P}) \geq 0$ *et donc que* φ *est positif.*

Caractère défini *de* φ *: soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *tel que* $\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = 0$.
Par définition de φ*, on a :*

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = \int_0^1 (t\mathrm{P}(t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longmapsto (t\mathrm{P}(t))^2$ *est une fonction continue et positive sur [0 ;1] d'intégrale nulle sur* $[0;1]$*, par théorème elle est nulle sur* $[0;1]$*. Par suite, on en déduit que :* $\forall t \in [0;1], (t\mathrm{P}(t))^2 = 0$*, et donc :*

$$\forall t \in [0;1] t\mathrm{P}(t) = 0.$$

On a alors : $\forall t \in]0;1], \mathrm{P}(t) = 0$.
Par conséquent, P *est une fonction polynôme de degré au plus n qui possède une infinité de racines sur l'intervalle.*
Par théorème, P *est le polynôme nul. Ainsi,* φ *est définie.*

Conclusion : φ *est un application bilinéaire, symétrique, positive et définie, par définition,* φ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 0.2. *1. Justifier la convergence de* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ *pour tout* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

La fonction $\psi : t \longmapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et si on pose* $\mathrm{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ *avec* $a_n \neq 0$*, on a :*

$$|\psi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_n| \, t^n \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

Donc $t^2|\psi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_n| \, t^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$*, et ainsi :*

$$|\psi(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ *assure par le théorème de comparaison, la convergence absolue, et donc la convergence de* $\int_1^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ *et par suite celle de* $\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$.

On raisonne de manière identique pour montrer que $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ *converge, et par suite on aura la convergence de* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$.

On admet que l'application φ *définie par :*

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. *Soient* $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ *et pour* $n \in \mathbb{N}, \mathrm{H}_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.

   (a) *Trouver une relation entre* $\mathrm{H}_{n+1}, \mathrm{H}_n$ *et* H'_n.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}, \mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$, *donc en dérivant, on obtient :*

   $$\mathrm{H}'_n(x) = (-1)^n \left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x) + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n+1)}(x) \right)$$

   et :

   $\mathrm{H}'_n(x) = x \times (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x) - (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h^{(n+1)}(x)$
   $= x\mathrm{H}_n(x) - \mathrm{H}_{n+1}(x)$

   ce qui est bien ce que l'on cherchait.

   (b) *Montrer que* H_n *est un polynôme de degré* n.
   Les polynômes H_n *sont appelés les* ***polynômes de Hermite***.

   On raisonne par récurrence sur n. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on considère la propriété :*

   $$"\mathscr{P}(n) : \deg \mathrm{H}_n = n".$$

   - *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*
     $$\mathrm{H}_0(x) = (-1)^0 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} h(x) = (-1)^0 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$
     et donc $\mathrm{H}_0 = 1$ *et on a* $\deg \mathrm{H}_0 = 0$, *et la propriété* $\mathscr{P}(0)$ *est vraie.*
   - *Supposons que l'on ait la propriété* $\mathscr{P}(n)$ *pour un entier* n *donné, et montrons que, sous cette hypothèse, on a la propriété* $\mathscr{P}(n+1)$.
     Si $n = 0, \mathrm{H}'_n = 0$ *et par suite de la relation* $\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{H}_n - \mathrm{H}'_n$, *on en déduit que*
     $$\deg \mathrm{H}_{n+1} = \deg(\mathrm{H}_n) + 1 = n + 1$$
     d'où l'on a bien $\mathscr{P}(n+1)$ *dans ce cas.*
     Si $n > 0$, *alors* $\deg(\mathrm{H}'_n) = n - 1$, *et donc par opérations sur les degrés, la relation* $\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{H}_n - \mathrm{H}'_n$ *donne encore ici que :*
     $$\deg(\mathrm{H}_{n+1}) = \max(\deg(\mathrm{X}\mathrm{H}_n), \mathrm{H}'_n) = n + 1$$
     d'où l'on a bien encore $\mathscr{P}(n+1)$.
   - *La propriété* $\mathbb{P}(n)$ *étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier* n.

(c) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{H}_n - n\mathrm{H}_{n-1}$$

et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_n' = n\mathrm{H}_{n-1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, h'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -xh(x)$, *donc en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient pour* $n \geq 1$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$h^{(n+1)}(x) = (h')^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{(k)} h^{(n-k)}(x) = (-x)h^{(n)}(x) + (-n)h^{(n-1)}(x)$$

où $(-x)^{(k)}$ *est une écriture (abusive) qui désigne la dérivée* k^{e} *de la fonction* $x \longmapsto -x$.

Donc en multipliant par $(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ *les deux membres de cette égalité, on a*

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = x\mathrm{H}_n(x) - n\mathrm{H}_{n-1}(x)$$

d'où l'égalité polynomiale voulue, et comme $\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{H}_n - \mathrm{H}_n'$, *il vient* $\mathrm{H}_n' = n\mathrm{H}_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$.

(d) *Montrer que :* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{H}_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t &= \int_a^b (-1)^k \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} h^{(k)} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (-1)^k h^{(k)}(t)\mathrm{d}t \\
&= (-1)^k \left[h^{(k-1)}(t)\right]_a^b \\
&= (-1)^k \left[(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{H}_{k-1}(t)\right]_a^b \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\mathrm{H}_{k-1}(a) - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}}\mathrm{H}_{k-1}(b)
\end{aligned}$$

Comme H_{k-1} *est une fonction polynôme, on a :*

$$\lim_{b \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{2}}\mathrm{H}_{k-1}(b) = 0$$

et

$$\lim_{b \to -\infty} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\mathrm{H}_{k-1}(x) = 0.$$

On en déduit, en faisant tendre a vers $-\infty$ *et b vers* $+\infty$ *en ayant au préalable scindé l'intégrale en 2 intégrales avec une seule borne impropre que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ *converge et qu'elle est nulle.*

3. *Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.*

   Soient $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *avec* $i \neq j$, *et supposons par exemple que* $i > j$. *Alors :*

   $$\langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_i(t)\mathrm{H}_j(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_i(t)(-1)^j h^{(j)}(t)\mathrm{d}t$$

   Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < v$ *et posons* $\mathrm{I}(a,b) = \int_a^b \mathrm{H}_i(t)(-1)^j h^{(j)}(t)\mathrm{d}t$ *et effectuons une intégration par parties :*

   $$u(t) = \mathrm{H}_i(t) \quad \textit{se dérive en} \quad u'(t) = i\mathrm{H}_{i-1}(t)$$
   $$v(t) = (-1)^j h^{(j)}(t) \quad \begin{matrix}\textit{se dérive en}\\ \textit{se dérive en}\end{matrix} \quad v'(t) = (-1)^j h^{(j-1)}(t)$$

   les deux fonctions u *et* v *étant de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a;b]$.
   On obtient alors :

   $$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[(-1)^j h^{(j-1)}(t)\mathrm{H}_i(t)\right]_a^b - i\int_a^b \mathrm{H}_{i-1}(t)(-1)^j h^{(j-1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{H}_i(t)\mathrm{H}_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^b + i\int_a^b \mathrm{H}_{i-1}(t)\mathrm{H}_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Comme $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{H}_i(t)\mathrm{H}_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to-\infty} \mathrm{H}_i(t)\mathrm{H}_{j-1}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, *en faisant tendre* a *vers* $-\infty$ *et* b *vers* $+\infty$ *et en ayant au préalable coupé l'intégrale en deux intégrales à une seule borne impropre, on en déduit que :*

   $$\langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j \rangle = i\,\langle \mathrm{H}_{i-1} \mid \mathrm{H}_{j-1} \rangle$$

   ce qui donne par itérations successives :

   $$\langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j \rangle = i(i-1)\dots(i-j+1)\,\langle \mathrm{H}_{i-j} \mid \mathrm{H}_0 \rangle$$

   Or d'après la question (3)(d) comme $i - j \geq 1$ *:*

   $$\langle \mathrm{H}_{i-j} \mid \mathrm{H}_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_{i-j}(t)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = 0.$$

   En conclusion, on a prouvé que :

   $$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^*,\ \textit{avec } i \neq j, \langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j \rangle = 0.$$

   Toujours d'après la question (3)(d), pour $j \geq 1, \langle \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_j \rangle = 0$.
   Ainsi la famille $(\mathrm{H}_j)_{0\leq j\leq n}$ *est une famille orthogonale de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   Composée de $n+1$ *polynômes non nuls,* $(\mathrm{H}_j)_{0\leq j\leq n}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, *donc finalement est une base orthogonale de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.