Devoir-Maison 10

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que : $(X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1))$ est un base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de 1 dans cette base.
   On commence par étudier la liberté : soient donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $aX(X-1) + bX(X+1) + c(X-1)(X+1) = 0$. Alors, en évaluant l'expression associée en :
   - 0, cela donne : $-c = 0$ soit $c = 0$.
   - 1 , cela donne : $2b = 0$ soit $b = 0$.
   - -1, cela donne : $2a = 0$ soit $a = 0$.

   La famille est donc libre et $card(\mathscr{F}) = dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
   $\mathscr{F}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   On cherche maintenant à exprimer 1 en fonction de $X(X-1), X(X+1)$ et $(X-1)(X+1)$.
   Soit donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
   $$aX(X-1) + bX(X+1) + c(X-1)(X+1) = 1.$$
   Alors, en évaluant l'expression associée en :
   - 0 , cela donne : $-c = 1$ soit $c = -1$.
   - 1, cela donne : $2b = 1$ soit $b = \frac{1}{2}$.
   - -1, cela donne : $2a = 1$ soit $a = \frac{1}{2}$.

   Ainsi : $1 = \frac{1}{2}X(X-1) + \frac{1}{2}X(X+1) - 1 \times (X-1)(X+1)$
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que pour tout réel a, F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer sa dimension.
   Soit $P \in F_a$ alors P s'annule en a donc il est divisible par $X - a$ et il existe $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P = (X-a)Q$.
   $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ ssi :
   $$\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2, Q = cX + d$$
   D'où $P = (X - a(cX + d)$ et :
   $$F_a = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \exists (c, d) \in \mathbb{R}^2, P = cX(X-a) + d(X-a)\} = Vect(\{X(X-a), X-a\})$$
   $\{X(X-a), X-a\}$ est une famille libre car échelonnée en degré et elle génère F_a, c'est donc une base de F_a et $dim(F_a) = 2$.

(b) Déterminer une base de $F_1 \cap F_{-1}$.
Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors : $P \in F_1 \cap F_{-1}$ si et seulement si :

$$P(1) = P(-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a \end{cases}$$

Donc $P = a(X^2-1) = a(X-1)(X+1)$ et $F_1 \cap F_{-1} = \text{Vect}((X-1)(X+1))$.
$\{(X-1)(X+1)\}$ est donc une famille génératrice de $F_1 \cap F_{-1}$.
Toute famille constituée d'un seul élément non nul étant libre, on en déduit que $\{(X-1)(X+1)\}$ est une base de $F_1 \cap F_{-1}$.

(c) Montrer que $F_0 = \text{Vect}(X(X-1), X(X+1))$.
Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in F_0 \Leftrightarrow P(0) = 0 &\Leftrightarrow c = 0 \\ &\Leftrightarrow P = aX^2 + bX \\ &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}\left(X, X^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\{X, X^2\}$ est une famille génératrice de F_0. Elle est de plus libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de F_0 ce qui assure que $\dim(F_0) = 2$.
Par ailleurs : $X(X-1)$ et $X(X+1)$ s'annulent en 0 donc appartiennent à F_0 .
F_0 étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que :

$$\text{Vect}(X(X-1), X(X+1)) \subset F_0.$$

Or $\{X(X-1), X(X+1)\}$ est une sous-famille d'une base (Cf. question 1) donc elle est libre et :

$$\dim(\text{Vect}(X(X-1), X(X+1)) = 2 = \dim(F_0)$$

par définition du rang.
Par inclusion du sous-espace-vectoriel et par égalité des dimensions, on a donc :

$$\text{Vect}(X(X-1), X(X+1)) = F_0$$

(d) Montrer que $F_0 \oplus H = \mathbb{R}_2[X]$ avec $H = F_1 \cap F_{-1}$.
Puisque d'après les questions précédentes :

$$F_0 = \text{Vect}(X(X-1), X(X+1)) \text{ et } H = \text{Vect}((X-1)(X+1))$$

on a :

$$F_0 + H = \text{Vect}(X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)) = \mathbb{R}_2[X]$$

puisque cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ d'après la question 1 donc en particulier une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Par ailleurs, d'après la question 2 : $\dim(H) = 1$ et d'après la question 3 , $\dim(F_0) = 2$. Ainsi :

$$\dim(H) + \dim(F_0) = \dim(R_2[X])$$

On a donc prouvé que :

$$F_0 + H = \mathbb{R}_2[X]$$

et

$$\dim(H) + \dim(F_0) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

donc par caractérisation des supplémentaires en dimension finie :

$$F_0 \oplus H = \mathbb{R}_2[X]$$