

Programme de khôlle 22

Semaine du 25 mars 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes et déterminer les éventuels points critiques.

1. $f : (x, y) \mapsto \sin(2xy - y)$
2. $f : (x, y) \mapsto x^2y$.
3. $f : (x, y) \mapsto \arctan(2x + y)$.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. 1. Déterminer les extremums de $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

$$\text{avec } T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

2. Soient $a, b > 0$. Soit \mathcal{C} l'hyperbole de \mathbb{R}^2 d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(a) Déterminer les points réguliers de \mathcal{C} .

(b) Donner en ces points une équation de la tangente à \mathcal{C} .

Exercice 2.2. 1. Déterminer les extremums de $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$$

2. Soient $a, b > 0$. Soit \mathcal{C} l'ellipse de \mathbb{R}^2 d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- (a) Déterminer les points réguliers de \mathcal{C} .
 (b) Donner en ces points une équation de la tangente à \mathcal{C} .

Exercice 2.3. 1. Soit \mathcal{C} la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation :

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

- (a) Déterminer les points réguliers de \mathcal{C} .
 (b) Donner en ces points une équation de la tangente à \mathcal{C} .

La courbe obtenue s'appelle le *Folium de Descartes*.

2. Soit \mathcal{S} la surface de \mathbb{R}^3 d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0.$$

- (a) Déterminer les points réguliers de \mathcal{S} .
 (b) Donner une équation du plan tangent à \mathcal{S} en $(3, 0, 0)$.

Cette surface s'appelle un **tore**.

Chap.16 : Fonctions de plusieurs variables

1 Introduction à la topologie de \mathbb{R}^n

- 1.1 Norme et distance
 1.2 Parties ouvertes, parties fermées
 1.3 Intérieur, extérieur

2 Limite, continuité

- 2.1 Définitions
 2.2 Propriétés

3 Calcul différentiel

- 3.1 Dérivées partielles
 3.1.1 D'ordre 1
 3.1.2 D'ordre 2
 3.2 Gradient
 3.3 Composées classiques

4 Équations aux dérivées partielles

5 Extremums d'une fonction de deux variables

- 5.1 Définitions, propriétés
 5.2 Méthode de recherche des extremums globaux sur une partie fermée et bornée

6 Applications géométriques

6.1 Courbes du plan

6.2 Surfaces

6.2.1 Définitions, plan tangent

6.2.2 Position d'une surface d'équation $z = g(x, y)$ par rapport à son plan tangent