Chap.14 : Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées seront définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Notion d'équation différentielle

Définition 1.1. *On appelle* ***équation différentielle*** *toute équation liant une fonction et ses dérivées de tout ordre.*
Cette équation impose implicitement que la fonction solution soit « suffisamment » dérivable.
*L'****ordre*** *de l'équation différentielle correspond à l'ordre de dérivation le plus grand qui apparaît dans l'équation.* ***Résoudre une équation différentielle*** *c'est déterminer une fonction qui satisfait la relation et un intervalle sur lequel cette relation est satisfaite.*

Application 1.2. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle d'ordre 2 :*

$$(E) : (1+x^2)y'' + xy' - y = 0$$

Application 1.3. *La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est-elle solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle du premier ordre :*

$$(E) : tx' - x = \frac{-1}{t}$$

où x désigne la fonction inconnue et t la variable ?

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définition

Définition 2.1. • *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, une équation de la forme :*

$$(E) : y' + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et l'inconnue y une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.

• *Une fonction f est dite solution de (E) lorsque f est dérivable sur I et si :*

$$\forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$$

Remarque 2.2. *1. une équation différentielle peut admettre une infinité de solutions sur un intervalle. Par exemple, les solutions de l'équation différentielle $y' = t$ sont toutes les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}t^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

2. Dans la pratique, on peut rencontrer une équation du type :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

On se ramène aux conditions de la définition en résolvant l'équation différentielle sur un intervalle I sur lequel $a(t) \neq 0$. En effet, l'équation peut s'y écrire : $y' + \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{c(t)}{a(t)}$

Définition 2.3. *On appelle **équation homogène associée** à l'équation (E) l'équation :*

$$(H) : y' + a(t)y = 0$$

Application 2.4. *Démontrer que si f et g sont deux solutions de (H) et si λ et μ sont deux réels, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est solution de (H). C'est pour cette raison que l'on dit qualifie ces équations de linéaires.*

2.2 Résolution de l'équation homogène

2.2.1 Lorsque a est une fonction constante

Proposition 2.5. *Si $a \in \mathbb{K}$ alors les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y' + ay = 0$$

sont les fonctions $y(t) = ce^{-at}$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Preuve :

Application 2.6. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

1. $(E_1) : y' + 3y = 0$
2. $(E_2) : y' - 4y = 0$
3. $(E_3) : 2y' - 3y = 0$
4. $(E_4) : 3y' = -4y$

2.2.2 Cas général

Proposition 2.7. *Les solutions de* $(H) : y' + a(t)y = 0$ *sont les fonctions* y *définies sur* I *par :*

$$y : t \mapsto ce^{-A(t)}$$

où $c \in \mathbb{K}$ *et* A *est une primitive de* a*.*

Application 2.8. *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $(H) : y' - \frac{t}{1+t^2}y = 0$

Application 2.9.

1. *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que :*

$$\forall x \in \left]-1; +\infty\right[, \frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ *sur* $\left]-1; +\infty\right[$*.*

2. *Résoudre l'équation différentielle :* $(H) : y' = \frac{-x}{x+1}y$

2.3 Résolution de l'équation complète

Proposition 2.10. *Si* y_P *est une solution particulière de*

$$(E); y' + a(t)y = b(t)$$

alors toutes mes solutions de (E) *sont de la forme :*

$$y = y_P + y_H$$

où y_H *est une solution de l'équation homogène associée* (H)*.*

Méthode 2.11. *Pour résoudre une équation différentielle (E) linéaire d'ordre 1 sur un intervalle I :*

1. *on écrit (H) l'équation homogène associée à (E) et on la résout sur I en explicitant les solutions ;*
2. *on cherche une solution particulière y_P de (E) sur I ;*
3. *on met en forme les solutions de (E) sur I.*

Application 2.12.
1. *Vérifier que la fonction $f : x \mapsto 1+x^2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$(E) : y' - \frac{x}{1+x^2} y = x$$

2. *En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.*

Application 2.13. *Soit $(E) : y' + xy = x^2 \mathrm{e}^{-x}$.*
1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène (H) associée.*
2. *Déterminer deux réels a et b tels que la fonction*

$$h : x \mapsto (ax + b)e^{-x}$$

soit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. *En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.14. *Soit $t_0 \in I$, si on fixe une condition $y(t_0) = y_0$, alors il existe une unique fonction solution du système :*

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

C'est le "problème de Cauchy".

Application 2.15. *Déterminer la solution de* $(E) : y' + xy = x^2e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}$ *qui vérifie* $f(0) = -1$.

2.4 Recherche de solutions particulières

Lorsqu'aucune solution particulière n'est évidente, on dispose de plusieurs méthodes de recherche.

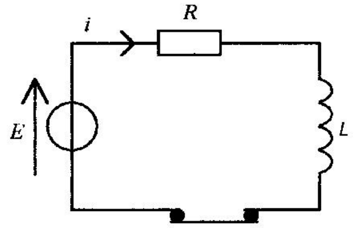
2.4.1 Coefficient constant et second membre constant

Proposition 2.16. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, *alors l'équation* $(E) : y' + ay = b$ *admet :*

- *si* $a \neq 0$: $y_P(t) = \frac{b}{a}$ *comme solution particulière. Les solutions de* (E) *sont alors les fonctions :*
$$y(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a} \text{ avec } c \in \mathbb{K}$$
- *si* $a = 0$, $y_P(t) = bt$ *comme solution particulière.Les solutions de* (E) *sont alors les fonctions* $y(t) = bt + c$ *avec* $c \in \mathbb{K}$

Application 2.17. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*
$$(E) : 2y' = 4y - 7$$
puis déterminer la fonction f *solution de* (E) *qui vérifie* $f(0) = 1$.

Exemple 2.18. *Bobine soumise à une tension constante.*



La tension U aux bornes de la bobine et l'intensité i du courant qui la traverse sont reliées par l'équation différentielle :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U$$

où L est l'inductance de la bobine et R sa résistance supposée ici non nulle. L'équation différentielle avec les notations de ce chapitre devient :

$$(E) : Ly' + Ry = U \text{ avec } L, R \text{ et } U \text{ des constantes réelles.}$$

L'inductance étant non nulle :

$$(E) : y' + \frac{R}{L}y = \frac{U}{L}$$

Par ailleurs, l'intensité à l'instant initial $t = 0$ est nulle car l'énergie emmagasinée dans la bobine doit être continue.
Déterminer la solution $i(t)$.

2.4.2 Second membre de la forme $b(t) = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{K}$

Proposition 2.19. *Une solution particulière de $(E) : y' + ay = P(t)e^{\alpha t}$ où a et α sont des constantes et P un polynôme de degré n est de la forme :*

$$y_P(t) = Q(t)e^{\alpha t}$$

avec :

- *si $\alpha \neq -a$: $deg(Q) = deg(P) = n$;*
- *si $\alpha = -a$: $deg(Q) = deg(P) + 1 = n + 1$*

Application 2.20. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

1. $(E_1) : y' + 2y = (t^2 + 1)e^{-t}$
2. $(E_2) : y' + 2y = (t^2 - 1)e^{-2t}$

2.4.3 Méthode de variation de la constante

Nous savons que la solution générale de l'équation homogène (H) est de la forme $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où A désigne une primitive de la fonction $t \mapsto a(t)$. L'idée est de recherche une solution particulière y_P de

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

sous la forme :

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$$

Il s'agit de la méthode de la **variation de la constante**.

Par substitution de la fonction proposée pour y_P dans (E), on obtient :

$y_P' + a(t)y_P = \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} + a(t)\lambda(t)e^{-A(t)}$
$\Leftrightarrow y_P' + a(t)y_P = \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)$
$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$

Méthode 2.21. *On cherchera une solution particulière y_P de (E) sur I sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ est une fonction inconnue que l'on déterminera. Ainsi :*

1. *on calculera $y_p'(t)$ pour tout $t \in I$;*
2. *on reportera dans $(E) : y + a(t)y = b(t)$ l'expression de y_P et de y_p' et on obtiendra une relation donnant une expression de $\lambda'(t)$;*
3. *on essaie alors d'expliciter $\lambda(t)$ en recherchant une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ que l'on reporte ensuite dans l'expression de y_P.*

Application 2.22. *À l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles :*

1. $(E_1) : y' + y = cos(3t)e^{-t}$
2. $(E_2) : y' - 2y = \frac{1}{x}e^{2x}$

2.4.4 Principe de superposition des solutions

Proposition 2.23. *Si :*

- y_1 *est une solution particulière de* $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$
- y_2 *est une solution particulière de* $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$

alors $y_1 + y_2$ *est une solution de* $(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$

Preuve :

Application 2.24. *Résoudre à l'aide du principe de superposition des solutions les équations différentielles suivantes :*

1. $(E_1) : y' - y = x + e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}$
2. $(E_2) : y' - y = 2te^{2t} + \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}}$ *sur* $]-1; 1[$